2.9 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Se numa região S em $\mathbb{R}^3$ tem um eixo de simetria, as integrais simples em S se tornam mais "fáceis" de serem calculadas se forem usadas as *Coordenadas Cilíndricas*. Se houver simetria em relação a um ponto, é conveniente escolher o ponto como origem e usar *Coordenadas Esféricas*.

Para definir a integral tripla em coordenadas cilíndricas, construa uma partição Δ da região S através dos planos que passem pelo eixo z, pelos planos perpendiculares ao eixo z e pelos cilindros circular reto, tendo o eixo z como o seu eixo. Os elementos da partição construída estão inteiramente em S. Esse tipo de partição é chamada de *Partição Cilíndrica*. A maior medida do comprimento de qualquer diagonal das sub-regiões é chamada de *Norma* da partição. Seja n o número de sub-regiões da partição, e seja $\Delta_i V$ a medida do volume da i-ésima sub-região. A medida da área da base é $\bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$, onde $\bar{r}_i = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$. Assim, se $\Delta_i z$ é a medida da altura da i-ésima sub-região, então,

$$\Delta_i V = \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z.$$

Seja f uma função de r, θ e z e suponha que f seja contínua em S. Escolha um ponto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ da i-ésima sub-região de tal forma que $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$ e $z_{i-1} \leq \bar{z}_i \leq z_i$. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z.$$

Quando a norma $||\Delta||$ tende a zero, pode ser provado que sob condições convenientes, o limite dessa soma existe. Esse limite é chamado de *Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas* da função f em S e escrevemos:

$$\int\int\int_S f(r, \theta, z) dV = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\int\int_S r f(r, \theta, z) dr d\theta dz = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z.$$

Observe que em coordenadas cilíndricas $dV = r dr d\theta dz$. É possível calcular a integral tripla por uma integral iterada. Suponha, por exemplo, que a região S está limitada pelos planos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, com $\alpha < \beta$, pelos cilindros $r = \gamma_1(\theta)$, $r = \gamma_2(\theta)$, onde γ_1 e γ_2 são curvas suaves em $[\alpha, \beta]$ e $\gamma_1(\theta) \leq \gamma_2(\theta)$, $\forall \alpha \leq \theta \leq \beta$, e pelas superfícies $z = F_1(r, \theta)$ e $z = F_2(r, \theta)$, onde F_1 e F_2 são funções de duas variáveis suaves numa região R do plano polar, limitada pelas curvas $r = \gamma_1(\theta)$ e $r = \gamma_2(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Suponha também que $F_1(r, \theta) \leq F_2(r, \theta)$, para todo ponto (r, θ) em R. Então a integral tripla pode ser calculada por uma integral iterada através da fórmula

$$\int\int\int_S f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma_1(\theta)}^{\gamma_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$

Existem outras cinco integrais iterada que podem ser usadas para calcular a integral tripla, pois existem seis combinações possível para as variáveis r, θ e z. Vejamos o exemplo.

Exemplo 2.9.1 *Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelo plano $z = x$.*

Solução: Temos que

$$V = \int\int\int_S f(x,y,z)dV = \int\int\int_S dV.$$

Assim, usando coordenadas, chegamos a

$$V = \int\int\int_S rf(r,\theta,z)dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{rcos(\theta)} rdzdrd\theta.$$

Daí,

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2cos(\theta)d\theta dr = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)d\theta = \frac{1}{3}\, sen(\theta)|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, o volume do sólido é $\frac{1}{3}u.v.$. ■

Agora será definido a integral tripla em coordenadas esféricas. Uma partição esférica da região tridimensional S é feita pelos planos contendo o eixo z, esferas com centro na origem e cones com vértice na origem, e o eixo z como seu eixo. Se $\Delta_i V$ é a medida da i-ésima sub-região e $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ é um ponto dela, pode-se obter uma aproximação para $\Delta_i V$, considerando a região como se fosse um paralelepípedo retangular, e tomando o produto das medidas de suas três dimensões. Essas medidas são $\bar{\rho}_i sen(\bar{\phi}_i)\Delta_i\theta$, $\bar{\rho}_i\Delta_i\phi$ e $\Delta_i\rho$. Logo,

$$\Delta_i V = \bar{\rho}_i^2 sen(\bar{\phi}_i)\Delta_i\phi\Delta_i\theta\Delta_i\rho.$$

A integral tripla em coordenadas esféricas de uma função f em S é dada por:

$$\int\int\int_S f(\rho,\theta,\phi)dV = \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\rho},\bar{\theta},\bar{\phi})\Delta_i V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\rho},\bar{\theta},\bar{\phi})\bar{\rho}_i^2 sen(\bar{\phi}_i\Delta_i\phi\Delta_i\theta\Delta_i\rho) = \int\int\int_S f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 sen(\phi)d\rho d\theta d\phi.$$

Observe que em coordenadas esféricas $dV = \rho^2 sen(\theta)d\rho d\theta d\phi$. As integrais triplas podem ser calculadas por integrais iteradas.

Exemplo 2.9.2 *Ache a massa do hemisfério sólido com raio a metros, se a densidade de massa por volume em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do sólido e é medida em quilogramas por metro cúbico.*

Solução: Se $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ é um ponto na i-ésima sub-região de uma partição esférica, a densidade deste ponto é de $k\bar{\rho}_i\ kgm^{-3}$, onde k é uma constante. Se $M\ kg$ é a massa do sólido, então,

$$M = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \Delta_i V = \int\int\int_S f(\rho,\theta,\phi)dV.$$

Assim, $M = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0 \pi/2 \int_0^a \rho^3 sen(\phi)d\rho d\phi d\theta = a^4 k \int_0^{\pi/2}\int_0 \pi/2 sen(\phi)d\phi d\theta =$ $a^4 k\int_0^{\pi/2} d\theta = \dfrac{a^4 k\pi}{2}$. Logo, a massa do hemisfério sólido é $\dfrac{a^4 k\pi}{2}$. ■

Agora, faça alguns exercícios para treinar. Bons estudos.

2.10 Exercícios

Exercício 2.10.1 *Calcule o valor de cada integral.*

1. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{2y}^{1+y^2} xdzdydx;$
2. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{x}\int_{1}^{x+xy} xydzdydx;$
3. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{0}^{2-y} zdxdzdy;$
4. $\displaystyle\int_{-1}^0\int_e^{2e}\int_{0}^{\pi/3} yln(z)tg(x)dxdzdy;$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_z^{\pi/2}\int_{0}^{xz} cos\frac{y}{z}dydxdz;$

Exercício 2.10.2 *Calcule a integral tripla* $\int\int\int_S ydV$, *sendo* S *a região limitada pelo tetraedro formado pelos planos* $12x + 20y + 15z = 60$ *e pelos planos coordenados.*

Exercício 2.10.3 *Calcule a integral tripla* $\int\int\int_S ydV$, *sendo* S *a região limitada pelo tetraedro formado pelos pontos* $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$.