2.5 Propriedades envolvendo o Cálculo de Determinantes

Nessa seção estudaremos propriedades envolvendo o cálculo de determinantes. Algumas dessas propriedades já nos parecem naturais como, por exemplo, quando uma matriz A possui todos os elementos de uma fila valendo zero temos que $\det(A) = 0$.

Outras propriedades, não tão naturais mas já demonstradas também serão listadas como, por exemplo, o determinante de uma matriz tem o mesmo valor do determinante da sua transposta. Vamos as propriedades.

Teorema 2.5.1 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz. Se A possui uma fila com todos os elementos valendo zero, então,* $\det(A) = 0$.

Demonstração: Aplicando o Teorema de Laplace sobre a fila cujo todos os elementos são nulos, temos que o determinante fica igual a zero. ■

Exemplo 2.5.1 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$*, então,* $\det(A) = 0$*, visto que todos os elementos da segunda linha valem zero.*

■

Teorema 2.5.2 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz. Então,* $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

Demonstração: Já demonstrado na seção anterior. ■

Teorema 2.5.3 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz triangular (superior ou inferior). Então,* $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$*, ou seja, o valor de* $\det(A)$ *é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.*

Demonstração: Façamos a demonstração para uma matriz triangular superior. Isso não traz uma perda de generalidade na demonstração, visto que a transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior. Daí, seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, aplicando o Teorema de Lapace para a primeira coluna, temos que

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace para a primeira coluna da nova matriz

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix},$$

obtermos

$$\det(A) = a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Daí, repetindo o processo até a linha $n-1$, obtemos

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot(\cdots)\cdot a_{(n-1)(n-1)}\cdot\begin{vmatrix} a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot(\cdots)\cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

■

Veja o exemplo.

Exemplo 2.5.2 *Se* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$*, então,*

$$\det(A) = 3\cdot 1\cdot(-2)\cdot 5 = -30.$$

■

Uma consequência imediata do Teorema 2.5.3 está relacionada com determinante de matriz identidade.

Corolário 2.5.1 *Seja Id_n a matriz identidade de ordem n. Nessas condições, temos que* $\det(Id) = 1$.

Demonstração: Basta aplicar o Teorema 2.5.3, visto que a matriz identidade é uma matriz diagonal com todos os elementos da diagonal principal valendo 1. ■

O próximo resultado vai nos indicar o que ocorre com o determinante de uma matriz quando multiplicamos uma das suas filas por um número real.

Teorema 2.5.4 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz. Então, se multiplicarmos uma linha de A por uma constante k, então, o determinante da nova matriz é igual ao determinante da matriz A multiplicado pela constante k.*

Demonstração: Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz dada por

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja $B=(b_{ij})_n$ a nova matriz obtida de A trocando a linha i de A por ela multiplicada por k, ou seja,

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \cdots & k\cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, aplicando o Teorema de Laplace na linha i de B, temos que:

$$\det(B)=(k\cdot a_{i1})A_{i1}+(k\cdot a_{i2})A_{i2}+(\cdots)+(k\cdot a_{in})A_{in}=$$

$$=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+(\cdots)+a_{in}A_{in})=k\cdot\det(A).$$

■

O Teorema 2.5.4 nos "diz" o que acontece com o determinante de uma matriz quando multiplicamos uma das filas de uma matriz por um número. Contudo, não diz diretamente o que acontece quando multiplicamos toda a matriz por um número. Isso é uma consequência do Teorema 2.5.4, como veremos a seguir.

Corolário 2.5.2 *Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz. Assim, se $B=kA$, então, temos que* $\det(B)=k^n\det(A)$.

Demonstração: Basta aplicar o teorema anterior em cada uma das n linhas de A que o resultado fica demonstrado. ■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.5.3 *Se* $A=\begin{bmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$*, então,*

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} -1 & -19 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=7(-7+38)=217.$$

■

Exemplo 2.5.4 *Se* $A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$*, então,*

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 6(0+16) = 96.$$

■

Exemplo 2.5.5 *Se* $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$*, então,*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot \left| \begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= 8(60 - 2 + 0 - 0 - 3 + 10) = 8(65) = 520.$$

■

O resultado a seguir está relacionado com o determinante de matrizes que possuem linhas iguais.

Teorema 2.5.5 *Seja* $A = (a_{ij})_n$ *uma matriz que possui duas linhas iguais. Então, temos que* $\det(A) = 0$.

Demonstração: Suponha que a matriz A tenha as linhas p e q iguais. Dessa forma, aplicando o Teorema de Jacobi na linha p, ou seja, trocando a linha p da matriz A por ela somada com o oposto da linha q, obtemos uma matriz B com uma linha formada apenas por zero e, consequentemente, $\det(B) = 0$. Além disso, como $\det(A) = \det(B)$, segue que $\det(A) = 0$. ■

Uma consequência desses últimos resultados é apresentado a seguir.

Corolário 2.5.3 *Seja* $A = (a_{ij})_n$ *uma matriz que possui duas linhas tais que uma é múltipla da outra. Então, temos que* $\det(A) = 0$.

Demonstração: Suponha que a matriz A tenha as linhas p e q tais que $a_{pj} = \alpha a_{qj}$, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Dessa forma, temos que colocando α em evidência na linha s, temos que: $\det(A) = \alpha \det(B)$,, onde B é a matriz obtida de A colocando α em evidência na lina p. Como B possui duas linhas iguais, segue que $\det(B) = 0$ e, consequentemente, $\det(A) = 0$. ■

Exemplo 2.5.6 *Se* $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$*, então,* $\det(A) = 0$*, visto que a primeira linha e a terceira linhas são iguais.*

■

Exemplo 2.5.7 *Se* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & -12 \\ -3 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$*, então,* $\det(A) = 0$*, visto que a quarta coluna e a primeira coluna multiplicada por* -6.

■

O próximo resultado nos diz o que acontece com o determinante de uma matriz quando trocamos duas de suas linhas de lugar.

Teorema 2.5.6 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos duas filas paralelas de lugar, obtemos uma nova matriz $B = (b_{ij})_n$ tal que* $\det(B) = -\det(A)$.

Demonstração: Para demonstrar essa propriedade, usaremos o Princípio de Indução Finita (PIF). Para isso, considere $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$. Assim,

$$\det(B) = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = -\det(A).$$

Portanto a propriedade vale para $n = 2$.

Suponha agora que a propriedade seja válida para matrizes de ordem $n-1$ (Hipótese de Indução). Precisamos provar, então, que a propriedade continua válida para matrizes de ordem n. Para isso, seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem n. Vamos calcular o determinante de A usando o Teorema de Laplace sobre uma linha i, sabendo que a linha i não foi usada na troca de linhas.

Sendo $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem n e $B = (b_{ij})_n$ uma matriz oriunda de A onde trocamos duas linhas lugar. Dessa forma, usando a linha i, temos que: $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ e $\det(B) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}B_{ij}$. Como a matriz B é obtida de A trocando duas linhas de lugar, temos que o cofator B_{ij} (que é o determinante de uma matriz de ordem $n-1$) é obtido do cofator A_{ij} trocando duas linhas de lugar e, pela hipótese de indução, temos que $B_{ij} = -A_{ij}$. Como cada $b_{ij} = a_{ij}$, segue que

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-A_{ij}) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = -\det(A).$$

Portanto, como a propriedade vale para $n = 2$, e supondo que a propriedade vale para $n-1$ provamos que ela vale para n, segue do PIF que a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.5.8 *Se* $A = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}$, *então,* $\det(B) = \begin{vmatrix} -12 & -2 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 24 = -\det(A)$, *visto que obtemos B de A trocando a coluna dois com a coluna um de lugar.*

■

Exemplo 2.5.9 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, *então,* $\det(A) = -93$. *Por outro lado,* $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 93 = -\det(A)$, *visto que obtemos B de A trocando a linha dois com a linha três de lugar.*

■

Agora Vamos apresentar o *Teorema de Cauchy*[6].

Teorema 2.5.7 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer, de forma ordenada, pelos cofatores de outra fila paralela a ela é sempre igual a zero.*

Demonstração: Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz e considere a matriz $B = (b_{ij})_n$ obtida da matriz A, substituindo a linha s pela linha p, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Como B possui duas linhas iguais, segue que $\det(B) = 0$. Por outro lado, observe que na matriz B, temos que $b_{sj} = a_{pj}$ e que $B_{sj} = A_{sj}$, para todo j. Então, calculando o determinante da matriz B, pelo Teorema de Laplace, usando a linha s, temos que

$$0 = \det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{sj} B_{sj} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} A_{sj},$$

ou seja, a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer, de forma ordenada, pelos cofatores de outra fila paralela a ela é igual a zero. ■

Exemplo 2.5.10 *Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, então, $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0$.*

De fato: *Observe que*

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (20-6) - 3(15-2) + 5(9-4) = 14 - 39 + 25 = 0.$$

□

■

O próximo resultado está relacionado com o valor do determinante de duas matrizes que se diferenciam apenas por uma fila específica, e desejamos calcular a soma desses determinantes. É importante ressaltar que não estamos falando sobre o determinante da soma dessas duas matrizes.

[6] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi um matemático francês. O primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido foi a introdução do rigor na análise matemática. Também sistematizou a criação da Teoria de Grupos. Foi responsável pela criação da noção moderna de continuidade, entre tantas outras contribuições para a matemática e a física.

Teorema 2.5.8 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz dada por*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_{1j}+c_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_{2j}+c_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_{nj}+c_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

ou seja, a coluna j é dada pela soma $b_{ij} + c_{ij}$, para toda linha i. Então, nessas condições, temos que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & c_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & c_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & c_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Demonstração: Aplicando o teorema de Laplace na j-ésima coluna de A, temos que:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_{ij} + c_{jj}) A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} A_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_{ij} A_{ij} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & c_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & c_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & c_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

■

Veja a seguir uma aplicação desse teorema.

Exemplo 2.5.11 *Sendo* $A = \begin{bmatrix} a & b+c & d \\ e & f+g & h \\ i & j+k & l \end{bmatrix}$, *então,*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix}.$$

■

Exemplo 2.5.12 *Calcule o valor de* $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

Solução: Observe que

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & l \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0+0 & -3 \\ 2 & 5 & 7-7 & 9 \\ 3 & 6 & -2+2 & 1 \\ 2 & 3 & -2+3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & -2 & l \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -7 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & l \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-2.(-4) & 9-2.3 \\ 6-3.(-4) & 1-3.3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 18 & -8 \end{vmatrix} = -104 - 54 = -158.$$

■

Observação 2.5.1 *Do Resultado anterior podemos concluir que* $\det(A+B)$, *em geral, não tem o mesmo valor de* $\det(A)+\det(B)$. *Por exemplo, se* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, *então,* $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *e, consequentemente,*

$$-10 = \det(A+B) \neq \det(A)+\det(B) = -5-2 = -7.$$

■

Vamos agora apresentar a definição de *Combinação Linear* das filas de uma matriz. Essa definição é muito importante e amplamente utilizada no estudo em matemática. O conceito de combinação linear de filas de matrizes é amplamente explorado nos cursos de álgebra linear.

Definição 2.5.1 *Seja* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *uma matriz cujas linhas são representadas por* L_i, $i \in \{1,2,\cdots,m\}$. *Sejam* $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ *escalares. Dessa forma, a soma* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i L_i$ *é chamada de* ***Combinação Linear das Linhas*** *de* A.

■

Observação 2.5.2 *Trocando linhas por colunas na definição anterior temos a* ***Combinação Linear das Colunas*** *de* A.

■

Agora podemos apresentar a próxima propriedade, que está relacionada com uma matriz possuir uma fila como sendo a combinação linear das demais filas paralela a ela.

Corolário 2.5.4 *Seja* $A = (a_{ij})_n$ *uma matriz. Se uma fila de A é a combinação linear de outras filas paralelas a ela, então,* $\det(A) = 0$.

Demonstração: Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz. Sem perda de generalidade, suponha que a primeira linha de A seja a combinação linear das demais linhas, ou seja, $L_1 = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i L_i$. Assim, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^{m} \alpha_i L_i \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Então, aplicando primeiro o Teorema 2.5.8 e depois o Teorema 2.5.4, temos que:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \sum_{i=2}^{m} \alpha_i L_i \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \sum_{i=2}^{m} \begin{vmatrix} \alpha_i L_i \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \begin{vmatrix} L_i \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix},$$

onde cada $\begin{vmatrix} L_i \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$ possui duas linhas iguais e, consequentemente, esses determinantes valem zero. Portanto, segue que $\det(A) = 0$. ■

Agora apresentaremos uma das mais importantes propriedades envolvendo determinantes de matrizes. Essa propriedade, conhecida como *Teorema de Binet*, nos diz o que acontece com o determinantes do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem.

Teorema 2.5.9 *(**Teorema de Binet**:) Sejam $A = (a_{ij})_n$ e $B = (b_{ij})_n$ matrizes. Então, temos que* $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Demonstração: Provaremos esse teorema pelo Princípio da Indução Finita. Para isso, provaremos que ele vale para $n = 2$. Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$, então,

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\det(A\cdot B) = (am+bp)(cn+dq) - (an+bq)(cm+dp) =$$

$$= acmn + admq + bcnp + bdpq - acmn - adnp - bcmq - bdpq =$$

$$= admq + bcnp - adnp - bcmq.$$

Por outro lado,

$$\det(A) = ad - bc \text{ e } \det(B) = mq - np \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A)\cdot\det(B) = admq + bcnp - adnq - bcmq \Rightarrow \det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B).$$

Agora, suponha que a propriedade seja válida para $n-1$ elementos. Precisamos provar que a propriedade vale para n. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$. Assim, temos que

$$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}.$$

Separando as somas que aparecem na primeira linha e colocando cada a_{1j} em evidência, obtemos:

$$\det(A\cdot B) = a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{vmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=2}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=2}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=2}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + \cdots + a_{1n}M_n.$$

Agora, considere L_i sendo cada uma das linhas do determinante M_j. Assim, para cada j, obtenha o novo determinante N_j de M_j fazendo o conjunto de substituições:

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_2 & \rightarrow & L_2 - a_{21}L_1 \\ L_3 & \rightarrow & L_3 - a_{31}L_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L_n & \rightarrow & L_n - a_{n1}L_1 \end{array}\right. .$$

Assim, temos que

$$N_j = \begin{vmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \cdots & b_{nj} \\ \sum_{j=2}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=2}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=2}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=2}^{n} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=2}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=2}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix} = \det(M_j).$$

Dessa forma, temos que

$$\det(A \cdot B) = a_{11}N_1 + a_{12}N_2 + \cdots + a_{1n}N_n.$$

Por hipótese $\det(N_k) = D_{11}^A \cdot D_{1k}^B$, sendo D_{ij}^A, o menor complementar do elemento a_{ij} da matriz A e D_{ij}^B, o menor complementar do elemento b_{ij} da matriz B e

$$D_{11}^A \cdot D_{1k}^B = \begin{vmatrix} \sum_{j\neq k}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j\neq k}^{n} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j\neq k}^{n} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j\neq k}^{n} a_{nj}b_{jn} \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\det(A \cdot B) = a_{11}\left(b_{11}D_{11}^A \cdot D_{11}^B - b_{12}\left(b_{11}D_{11}^A \cdot D_{11}^B\right) + \cdots\right) + a_{12}\left(b_{12}D_{12}^A \cdot D_{21}^B - b_{22}\left(b_{22}D_{12}^A \cdot D_{22}^B\right) + \cdots\right) +$$

$$+ \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\left(b_{n1}D_{1n}^A \cdot D_{n1}^B - b_{n2}\left(b_{n2}D_{1n}^A \cdot D_{n2}^B\right) + \cdots\right) =$$

$$= a_{11}D_{11}^A\left(b_{11}D_{11}^B - b_{12}D_{12}^B + \cdots\right) - a_{12}D_{12}^A\left(-b_{21}D_{21}^B + b_{22}D_{22}^B + \cdots\right) + \cdots$$

Observe que cada uma das somas que aparecem multiplicando $a_{1j}D_{1j}^A$ é uma forma diferente de calcular o determinante da matriz B, trocando a linha escolhida na aplicação do Teorema de Laplace. Assim,

$$\det(A \cdot B) = a_{11} \cdot D_{11}^A \det(B) - a_{12} \cdot D_{12}^A \det(B) + \cdots = \left(a_{11}D_{11}^A - a_{12}D_{12} + \cdots\right)\det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Portanto, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. ■

Com o Teorema de Binet obtermos outra importante propriedade relacionada ao cálculo de inversa de matrizes, apresentada a seguir.

Corolário 2.5.5 *Seja* $A = (a_{ij})_n$ *uma matriz. Assim, se* A *é invertível, então,* $\det(A) \neq 0$ *e, nesse caso,* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Demonstração: A é invertível $\Rightarrow \exists\ A_n^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$, onde Id é a matriz identidade de ordem n

$$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(Id) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(Id) = 1 \text{ e}$$

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det(Id) \Rightarrow \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$$

Como $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$ são números reais e o seu produto é não nulo, segue que eles são números não nulos. Portanto, se A é invertível, então, $\det(A) \neq 0$ e, além disso, como $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, segue que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. ■

Observação 2.5.3 *A contra positiva do Corolário 2.5.5 é:*

"Se $\det(A) = 0$*, então, A não é invertível."*

Por isso, sempre que precisamos verificar de uma determinada matriz A é invertível, basta obtermos se o valor do seu determinante é diferente se zero pois, caso contrário, a matriz é não invertível.

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.5.13 *Descida se cada uma das matrizes a seguir é, ou não, invertível.*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; *c)* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$; *e)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; *d)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$; *f)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução:

a) Temos que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

Portanto, a matriz A é invertível.

b) Temos que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Portanto, a matriz A é invertível.

c) Temos que $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 0$, visto que a segunda coluna é múltipla da primeira coluna ($C_2 = -2 \cdot C_1$). Portanto, A é uma matriz singular.

d) Temos que $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, visto que a terceira linha é uma combinação linear das outras duas linhas $(L_3 = L_1 - L_2)$. Portanto, A é uma matriz singular.

e) Temos que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6-5 = 1 \neq 0.$$

Portanto, a matriz A é invertível.

f) Temos que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-2 = -2 \neq 0.$$

Portanto, a matriz A é invertível.

■

Exemplo 2.5.14 *Para quais valores de x que a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ x & 4 \end{bmatrix}$ não seja invertível.*

Solução: Temos que a matriz A é singular se $\det(A) = 0$. Assim,

$$\begin{vmatrix} 4 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4.$$

Portanto, a matriz A é singular de $x = -4$ ou $x = 4$. ■

Agora vamos apresentar uma forma de obter a matriz inversa de uma matriz invertível A, usando o determinante. Para isso, primeiro precisaremos da definição de *Matriz Adjunta*.

Definição 2.5.2 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem $n \geq 2$ e seja $C = (A_{ij})_n$ a matriz dos cofatores de A. Então, a* ***Matriz Adjunta****, e denotamos por $\overline{C}$, a transposta da matriz dos cofatores, ou seja,*

$$\overline{C} = C^T = (A_{ij})_n^T = (A_{ji})_n.$$

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.5.15 *Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Obtenha a matriz adjunta de A.*

Solução: Para obtermos a matriz adjunta $\overline{C}$ de A, precisamos obter o valor de cada um dos cofatores da matriz. Assim, como

- $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = 4;$

- $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} = 2;$

- $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = -2;$

- $A_{11} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = -3,$

seque que

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

■

Exemplo 2.5.16 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Obtenha a matriz adjunta de* A.

Solução: Para obtermos a matriz adjunta $\overline{C}$ de A, precisamos obter o valor de cada um dos cofatores da matriz. Assim, como

- $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-3 = -3;$

- $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0-9) = 9;$

- $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1;$

- $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2;$

- $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0-6 = -6;$

- $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1;$

- $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0-2 = -2;$

- $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1;$

- $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1,$

seque que

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Agora estamos pronto para encontrar uma forma de obter a inversa de uma matriz A, quando $\det(A) \neq 0$. Para isso, precisamos da sua matriz adjunta. Esse resultado vai ser uma consequência do teorema a seguir.

Teorema 2.5.10 *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem $n \geq 2$ e seja $\overline{C}_n$ a sua matriz adjunta. Então, temos que*

$$A \cdot \overline{C} = \overline{C} \cdot A = \det(A) \cdot Id,$$

onde Id_n é ma matriz identidade de ordem n.

Demonstração: Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz de ordem $n \geq 2$ e seja $\overline{C}_n$ a sua matriz adjunta. Então, $\overline{C}_n = (B_{ij})$, onde $B_{ij} = A_{ji}$, $\forall\ i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, é o cofator do elemento a_{ji}. Assim, cada elemento b_{ik} do produto $A \cdot \overline{C}$ é dado por

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj}.$$

Assim, temos que:

- se $i = k$, segue do Teorema de Laplace que $b_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \det(A)$;

- se $i \neq k$, segue do Teorema de Cauchy que $b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = 0$.

Dessa forma, temos que $A\cdot\overline{C}$ é uma matriz diagonal dada por

$$A\cdot\overline{C}=\begin{bmatrix}\det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A)\end{bmatrix}=\det(A)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\det(A)\cdot Id.$$

Por outro lado, se cada elemento c_{ik} do produto $\overline{C}\cdot A$ é dado por

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}B_{ij}\cdot a_{jk}=\sum_{j=1}^{n}A_{ji}\cdot a_{jk}=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\cdot A_{ij}.$$

Assim, temos que:

- se $i=k$, segue do Teorema de Laplace que $b_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{ij}=\det(A)$;
- se $i\neq k$, segue do Teorema de Cauchy que $b_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot A_{kj}=0$.

Dessa forma, temos que $\overline{C}\cdot A$ é uma matriz diagonal dada por

$$\overline{C}\cdot A=\begin{bmatrix}\det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A)\end{bmatrix}=\det(A)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\det(A)\cdot Id.$$

Portanto, se $A=(a_{ij})_n$ uma matriz e $\overline{C}_n$ é a sua matriz adjunta, então, temos que

$$A\cdot\overline{C}=\overline{C}\cdot A=\det(A)\cdot Id.$$

■

Agora podemos finalizar, obtendo uma forma de encontrar a matriz A^{-1} conhecendo a matriz adjunta de A.

Corolário 2.5.6 *Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz invertível e seja $\overline{C}_n$ a sua matriz adjunta. Então, temos que*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\overline{C}.$$

Demonstração: Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz invertível e seja $\overline{C}_n$ a sua matriz adjunta. Observe que

$$A\cdot A^{-1}=A\cdot\left(\frac{1}{\det(A)}\overline{C}\right)=\frac{1}{\det(A)}\left(A\cdot\overline{C}\right)=\frac{1}{\det(A)}(\det(A)\cdot Id)=Id \text{ e}$$

$$A^{-1}\cdot A=\left(\frac{1}{\det(A)}\overline{C}\right)\cdot A=\frac{1}{\det(A)}\left(\overline{C}\cdot A\right)=\frac{1}{\det(A)}(\det(A)\cdot Id)=Id.$$

Portanto, se A é uma matriz invertível, então,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\overline{C}.$$

■

Agora veja os exemplos.

Exemplo 2.5.17 *Encontre, se existir, a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução: Observe que $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 20 = 15 \neq 0$, segue que A é invertível. Assim, como

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5;$

- $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 \end{vmatrix} = 10;$

- $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} = 2;$

- $A_{11} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \end{vmatrix} = 7,$

seque que $\overline{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ e, portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{15} \\[2ex] \dfrac{2}{3} & \dfrac{7}{15} \end{bmatrix}.$$

■

Exemplo 2.5.18 *Encontre, se existir, a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Observe que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $1 \neq 0$, segue que A é invertível. Assim,

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1;$

- $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1;$

- $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1;$

- $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0;$

- $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0;$

- $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1;$

- $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1;$

- $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 0) = 0;$

- $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1;$

seque que $\overline{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e, consequentemente,

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

Agora, para finalizarmos essa seção, provaremos os três teoremas da seção anterior que ainda não foram demonstrados: Teorema de Chiò, de Jacobi e de Vandermonde.

Exemplo 2.5.19 *Prove a validade de Teorema de Chiò.*

Demonstração: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Considere L_i sendo cada uma das linhas da matriz A. Assim, para cada linha $i \in \{2,3,\cdots,n\}$,faça a seguinte substituição:

$$\begin{cases} L_2 & \rightarrow & L_2 - a_{21}L_1 \\ L_3 & \rightarrow & L_3 - a_{31}L_1 \\ \vdots & & \vdots \\ L_n & \rightarrow & L_n - a_{n1}L_1 \end{cases}.$$

Dessa forma, a nova matriz é construída de forma que o seu determinante é de mesmo valor que o determinante da matriz A e, por isso,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & \cdots & a_{2n} - a_{1n}a_{21} \\ 0 & a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & \cdots & a_{3n} - a_{1n}a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - a_{12}a_{n1} & a_{n3} - a_{13}a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{1n}a_{n1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & \cdots & a_{2n} - a_{1n}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & \cdots & a_{3n} - a_{1n}a_{31} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} - a_{12}a_{n1} & a_{n3} - a_{13}a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{1n}a_{n1} \end{vmatrix}.$$

Portanto, vale o Teorema de Chiò. ■

Exemplo 2.5.20 *Prove a validade de Teorema de Jacobi.*

Demonstração: Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Considere a matriz B, obtida de A, trocando a linha i, por ela somada com α vezes a linha k, com $k \neq i$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{k1} & a_{22} + \alpha a_{k2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{k1} & a_{22} + \alpha a_{k2} & \cdots & a_{in} + \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{22} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) + 0,$$

visto que no segundo determinante temos duas linhas iguais (linha i = linha k e $i \neq k$). Portanto, vale o Teorema de Jacobi. ■

Exemplo 2.5.21 *Prove a validade de Teorema de Vandermonde.*

Demonstração: Provemos o teorema pelo Princípio da Indução Finita - PIF. Seja $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}$. Então, V é uma matriz de Vandermonde e, além disso,

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1$$

e, portanto, a propriedade vale para $n = 2$. Agora, suponha que a propriedade seja válida para $n-1$ (Hipótese de Indução). Seja V uma matriz de Vandermonde de ordem n, ou seja,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdots & q_n \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & \cdots & q_n^2 \\ q_1^3 & q_2^3 & q_3^3 & q_4^3 & \cdots & q_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{n-1} & q_2^{n-1} & q_3^{n-1} & q_4^{n-1} & \cdots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Para cada linha L_i de V, $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$, substitua L_i por $L_i - q_1 L_{i-1}$. Dessa forma, obtemos uma nova matriz W, tal que $\det(W) = \det(V)$ e, além disso, na primeira coluna de W, todos os elementos, menos o $a_{11} = 1$ valem zero, ou seja,

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & q_2 - q_1 & q_3 - q_1 & q_4 - q_1 & \cdots & q_n - q_1 \\ 0 & q_2^2 - q_1 q_2 & q_3^2 - q_1 q_3 & q_4^2 - q_1 q_4 & \cdots & q_n^2 - q_1 q_n \\ 0 & q_2^3 - q_1 q_2^2 & q_3^3 - q_1 q_3^2 & q_4^3 - q_1 q_4^2 & \cdots & q_n^3 - q_1 q_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_2^{n-1} - q_1 q_2^{n-2} & q_3^{n-1} - q_1 q_3^{n-2} & q_4^{n-1} - q_1 q_4^{n-2} & \cdots & q_n^{n-1} - q_1 q_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (q_2 - q_1) & (q_3 - q_1) & (q_4 - q_1) & \cdots & (q_n - q_1) \\ 0 & q_2(q_2 - q_1) & q_3(q_3 - q_1) & q_4(q_4 - q_1) & \cdots & q_n(q_n - q_1) \\ 0 & q_2^2(q_2 - q_1) & q_3^2(q_3 - q_1) & q_4^2(q_4 - q_1) & \cdots & q_n^2(q_n - q_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_2^{n-2}(q_2 - q_1) & q_3^{n-2}(q_3 - q_1) & q_4^{n-2}(q_4 - q_1) & \cdots & q_n^{n-2}(q_n - q_1) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\det(V)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (q_2-q_1) & (q_3-q_1) & (q_4-q_1) & \cdots & (q_n-q_1) \\ 0 & q_2(q_2-q_1) & q_3(q_3-q_1) & q_4(q_4-q_1) & \cdots & q_n(q_n-q_1) \\ 0 & q_2^2(q_2-q_1) & q_3^2(q_3-q_1) & q_4^2(q_4-q_1) & \cdots & q_n^2(q_n-q_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_2^{n-2}(q_2-q_1) & q_3^{n-2}(q_3-q_1) & q_4^{n-2}(q_4-q_1) & \cdots & q_n^{n-2}(q_n-q_1) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} (q_2-q_1) & (q_3-q_1) & (q_4-q_1) & \cdots & (q_n-q_1) \\ q_2(q_2-q_1) & q_3(q_3-q_1) & q_4(q_4-q_1) & \cdots & q_n(q_n-q_1) \\ q_2^2(q_2-q_1) & q_3^2(q_3-q_1) & q_4^2(q_4-q_1) & \cdots & q_n^2(q_n-q_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_2^{n-2}(q_2-q_1) & q_3^{n-2}(q_3-q_1) & q_4^{n-2}(q_4-q_1) & \cdots & q_n^{n-2}(q_n-q_1) \end{vmatrix}.$$

Observe que todos os elementos da primeira coluna do último determinantes estão multiplicados por (q_2-q_1), todos os elementos da segunda coluna do último determinantes estão multiplicados por (q_3-q_1), $\cdots$, todos os elementos da coluna $n-1$ do último determinantes estão multiplicados por (q_n-q_1) e, por isso,

$$\det(V)=(q_2-q_1)(q_3-q_1)(\cdots)(q_n-q_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_2 & q_3 & q_4 & \cdots & q_n \\ q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & \cdots & q_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_2^{n-2} & q_3^{n-2} & q_4^{n-2} & \cdots & q_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Esse último determinante é de uma matriz de ordem $n-1$ e, por isso, vale a hipótese de indução, ou seja,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_2 & q_3 & q_4 & \cdots & q_n \\ q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & \cdots & q_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_2^{n-2} & q_3^{n-2} & q_4^{n-2} & \cdots & q_n^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{i>j}^{\{2,\cdots,n\}}(q_i-q_j)$$

e, consequentemente,

$$\det(V)=(q_2-q_1)(q_3-q_1)(\cdots)(q_n-q_1)\cdot\prod_{2>i>j}^{n}(q_i-q_j)=\prod_{i>j}^{\{1,\cdots,n\}}(q_i-q_j).$$

Portanto, vale o Teorema de Vandermonde. ■

Agora, faça os exercícios, bons estudos.

2.6 Exercícios

Exercício 2.6.1 *Justifique o motivo de cada um dos determinantes a seguir ser nulo, sem efetuar os cálculos.*

a) $\begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -8 & 10 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0;$ *d)* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ $0;$

b) $\begin{vmatrix} -7 & 12 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 13 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 0;$ *g)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & \end{vmatrix} = 0.$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ *f)* $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & n-p & z-x \end{vmatrix} =$

Exercício 2.6.2 *Calcule cada um dos determinantes a seguir.*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 25 & 36 & 49 \end{vmatrix};$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix};$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 16 & 9 & 4 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & -7 & 49 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix};$ *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix};$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & -4 & -9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 16 & 81 & -16 & -81 & 256 & 625 \end{vmatrix}.$

Exercício 2.6.3 *Determine os valores de x, caso existam, para que a matriz* $A = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ 4 & x+7 & 0 \\ 0 & 9 & x-2 \end{bmatrix}$ *seja singular.*

Exercício 2.6.4 *Determine os valores de x e y, caso existam, para que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix}$ *seja singular.*

Exercício 2.6.5 *Prove que* $\begin{vmatrix} \cos(2a) & \cos^2(a) & \text{sen}^2(a) \\ \cos(2b) & \cos^2(b) & \text{sen}^2(b) \\ \cos(2c) & \cos^2(c) & \text{sen}^2(c) \end{vmatrix} = 0.$

Exercício 2.6.6 *Prove que o determinante* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ *é múltiplo de 13 sem efetuar os cálculos do mesmo.*

Exercício 2.6.7 *Prove que o determinante* $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$ *é divisível por $x-3a$ sem efetuar os cálculos do mesmo.*

Exercício 2.6.8 *Sabendo que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$, *então, o valor de* $\begin{vmatrix} -2a & b & c \\ -6x & 3y & 3z \\ -2p & q & r \end{vmatrix}$ *é igual a?*

Exercício 2.6.9 *Calcule o valor de* $\begin{vmatrix} 4 & 11 & -7 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Exercício 2.6.10 *Classifique em verdadeiro ou falso cada uma das sentenças a seguir, justificando a sua resposta.*

a) *Se* Id *é a matriz identidade de ordem* 4, *então,* $\det(3Id) = 3$.

b) *Se* A *e* B *são matrizes quadradas de mesma ordem, então,* $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

c) *Se* A *e* B *são matrizes quadradas de ordem* 3 *tais que* $\det(A) = a$ *e* $\det(B) = b$, *então,* $\det\big((3AB^2)^T\big) = 27ab^2$.

d) *Se* A *e* B *são matrizes quadradas de ordem* n *tais que* $\det(A) = \dfrac{c}{4}$ *e* $\det(B) = 6c$, *com* $c \neq 0$, *então,* $\det\big((A^{-1}B)^T\big) = 24$.

e) *A soma de duas matrizes invertíveis é uma matriz invertível.*

f) *Se* A *e* B *são matrizes quadradas de mesma ordem, então,* AB *invertível implica em* A *e* B *serem matrizes não singular.*

g) *Existe uma matriz* A, *tal que* $A = -A^T$ *e* $\det(A) \neq 0$.

h) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 0$ *somente se* $a = -b$.

Exercício 2.6.11 *Sabendo que* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$, *então, o valor de* $\begin{vmatrix} 3a-2b & 3a+2b \\ 3c-2d & 3c+2d \end{vmatrix}$ *é igual a?*

Exercício 2.6.12 *Sabendo que* $A = \begin{bmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ 0 & x-7 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 \end{bmatrix}$, *então, para quais valores de* x *a matriz* A *é singular?*

Exercício 2.6.13 *Sejam* A *e* B *duas matrizes quadradas de ordem* 4. *Sabendo que* $\det(A) = 3$ *e* $\det(B) = 10$, *então, o valor de* $\det(A^2B^T)$ *é?*

Exercício 2.6.14 *Qual o valor de* x *na equação* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \end{vmatrix}$?

Exercício 2.6.15 *Qual o valor de x na equação* $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix}$*?*

Exercício 2.6.16 *Seja $A = (a_{ij})_n$ a matriz dada por* $\begin{cases} 0, & se \quad i < j \\ i+j & se \quad i = j \\ i-j & se \quad i > j \end{cases}$*. Nessas condições, os valores de x que satisfazem a equação $5x^2 < \det(A)$ é?*

Exercício 2.6.17 *Obtenha a matriz adjunta de cada uma das matrizes a seguir e, caso a matriz seja invertível, obtenha a sua inversa.*

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; *e)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *f)* $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

Exercício 2.6.18 *Determine o valor de k para que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ *se uma matriz singular e encontre a sua matriz adjunta.*

Exercício 2.6.19 *Sendo* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 & 1 \\ -12 & 10 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$*, então,* $\det(AB)$ *é igual a?*