5.2 Conjuntos Fechados

Definição 5.2.1 *Dizemos que a é um Ponto Aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$, quando a é o limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$.*

Observação 5.2.1 *Todo ponto $a \in X$ é um ponto aderente de X, visto que $a \in X$ é o limite da sequência $x_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 5.2.2 *Chamamos de Fecho do conjunto X, e denotamos por $\overline{X}$, ao conjunto formado por todos os pontos aderentes de X.*

Observação 5.2.2

1. *Uma consequência da Definição 5.2.2 é que $X \subset \overline{X}$ e, dessa forma,*
$$\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}.$$

2. *Se $X \subset Y$, então, $\overline{X} \subset \overline{Y}$.*

   De fato: *Se $x \in \overline{X}$, então, existe uma sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$. Como $X \subset Y$, temos uma sequência $x_n \in X \subset Y$ que converge para x e, portanto, $x \in \overline{Y}$.* □

Definição 5.2.3 *Um conjunto X é chamado de Fechado se $X = \overline{X}$.*

Da Definição 5.2.3 temos que um conjunto X é fechado se ele contém todos os seus pontos aderentes.

Definição 5.2.4 *Seja $X \subset Y$. Dizemos que X é Denso em Y, quando $\overline{X} = Y$.*

A Definição 5.2.4 nos diz que um conjunto X é denso em Y se todo ponto de Y é um ponto aderente de X, ou seja, se todo ponto de Y é limite de alguma sequência de pontos de X.

Exemplo 5.2.1 *Temos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, visto que para todo número real x, existe uma sequência $(x_n) \in \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$.*
Temos que $\mathbb{Q}^C$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, $\overline{\mathbb{Q}^C} = \mathbb{R}$, visto que para todo número real x, existe uma sequência $(x_n) \in \mathbb{Q}^C$ tal que $x_n \to x$.

Teorema 5.2.1 *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Demonstração: ($\Rightarrow$:) a é um ponto aderente de $X \Rightarrow$ existe uma sequência $(x_n) \in X$ tal que $x_n \to a \Rightarrow$ para toda vizinhança V de a, temos que $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande $\Rightarrow V \cap X \neq \varnothing$, para toda vizinhança V de a.
($\Leftarrow$:) Reciprocamente, para toda vizinhança $V = \left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right)$ de a, temos que $V \cap X \neq \varnothing \Rightarrow$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in V \cap X \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, para todo $n \Rightarrow (x_n) \subset X$ e $x_n \to a$ e, portanto, a é ponto aderente ao conjunto X. ■

Observação 5.2.3 *Do Teorema 5.2.1 temos que uma condição necessária e suficiente para que um ponto a não seja aderente ao conjunto X é que exista uma vizinhança V de a tal que $V \cap X = \varnothing$.*

Corolário 5.2.1 *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado, ou seja, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Demonstração: Temos que $\overline{X} \subset \overline{\overline{X}}$ (Observação 5.2.2 Item 1).
Por outro lado, seja $a \in \overline{\overline{X}}$, ou seja, a é um ponto aderente ao conjunto $\overline{X}$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $b \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \overline{X}$. Dessa forma, temos que $A = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ é uma vizinhança de b e, consequentemente, como b é um ponto aderente de X, segue que A contém algum ponto de X. Assim, qualquer ponto a aderente a $\overline{X}$ também é aderente a X e, consequentemente, $a \in \overline{X}$. ∎

Teorema 5.2.2 *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} \setminus F$ é aberto.*

Demonstração: ($\Rightarrow$:) Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e considere $a \in A = \mathbb{R} \setminus F$. Então, pelo Teorema 5.2.1, existe uma vizinhança V_a de a tal que $V_a \cap F = \varnothing$ e, por isso, $V_a \subset A$ e, consequentemente, A é um conjunto aberto.
($\Leftarrow$:) Reciprocamente, seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e seja a um ponto aderente ao conjunto $F = \mathbb{R} \setminus A$. Então, toda vizinhança V_a de a satisfaz $V_a \cap F \neq \varnothing$ e, por isso, $a \notin \mathring{A}$ e, consequentemente, sendo A aberto, segue que $a \notin A$ e, por isso, $a \in F$ e, consequentemente, F é fechado. ∎

Teorema 5.2.3

1. *Se F_1 e F_2 são conjuntos fechados, então, $F_1 \cup F_2$ também é um conjunto fechado.*
2. *Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados, então, a intersecção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

Demonstração:

1. Se F_1 e F_2 são conjuntos fechados, então, $A_1 = \mathbb{R} \setminus F_1$ e $A_2 = \mathbb{R} \setminus F_2$ são conjuntos abertos. Assim, do Teorema 5.1.1, Item 1, segue que $A_1 \cap A_2 = F_1^C \cap F_2^C = (F_1 \cup F_2)^C$ (Leis de De Morgan) é aberto e, portanto, $F_1 \cup F_2$ é um conjunto fechado.

2. Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados e considere $A_\lambda = \mathbb{R} \setminus F_\lambda$, para todo λ. Assim, temos que A_λ é um conjunto aberto, para todo λ. Do Teorema 5.1.1, Item 2, segue que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto e, portanto, $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda^C = \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right)^C = A^C$ é um conjunto fechado.

$\blacksquare$

Exemplo 5.2.2 *1. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado. Então, $a = \inf\{X\}$ e $b = \sup\{X\}$ são pontos aderentes de X. Em particular, a e b são pontos aderentes de (a, b).*

De fato: *Para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ tal que $a \leq x_n < a + \dfrac{1}{n}$. Assim, $(x_n) \subset X$, com $x_n \to a$, então, a é ponto aderente a X. Analogamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $y_n \in X$ tal que $b - \dfrac{1}{n} < y_n \leq b$. Assim, $(y_n) \subset X$, com $y_n \to b$, então, b é ponto aderente a X. Para o caso particular, tome $X = (a, b)$.* $\square$

2. Temos que

$$\overline{(a, b)} = \overline{[a, b)} = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b].$$

De fato: *Uma consequência do item anterior.* $\square$

3. Uma reunião infinita de conjunto fechados pode não ser um conjunto fechado.

De fato: *Tome $A_\lambda = \{\lambda; \lambda \in (a, b)\}$. Logo, A_λ é um conjunto fechado, visto que $A_\lambda^C = (-\infty, \lambda) \cup (\lambda, +\infty)$ que é um conjunto aberto. Assim, temos que $(a, b) = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in (a,b)} A_\lambda$ e, consequentemente, a união infinita de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado.* $\square$

Definição 5.2.5 *Uma Cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$, tal que $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$.*

Observação 5.2.4 *1. Em outras palavras, $X = A \cup B$ é uma cisão se nenhum elemento de A é aderente ao conjunto B e nenhum elemento de B é aderente ao conjunto A.*

2. $X = A \cup B$ é uma cisão, então, temos que A e B são conjuntos disjuntos.

3. A cisão $X = X \cup \varnothing$ é chamada de cisão Trivial.

Exemplo 5.2.3 *1. Se $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então, $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ é uma cisão de X.*

De fato: *Tome $A = \mathbb{R}_-$ e $B = \mathbb{R}_+$. Assim, temos que $X = A \cup B$, $\overline{A} =]-\infty, 0]$ e $\overline{B} = [0, +\infty[$. Daí, como $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$, segue que $X = A \cup B$ é uma cisão.* $\square$

2. Se $\alpha \in \mathbb{Q}^C$, então, $X = [(-\infty, \alpha) \cap \mathbb{Q}] \cup [(\alpha, +\infty) \cap \mathbb{Q}]$ é uma cisão para o conjunto dos números racionais.

De fato: *Tome $A = (-\infty, \alpha) \cap \mathbb{Q}$ e $B = (\alpha, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Assim, temos que $\overline{A} =]-\infty, \alpha]$ e $\overline{B} = [\alpha, +\infty[$. Daí, como $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$, segue que $X = A \cup B$ é uma cisão.* $\square$

3. *Se $a < c < b$, então, $[a, c] \cup (c, b]$ não é uma cisão.*

De fato: *Temos que que $[a, c] \cap \overline{(c, b]} = [a, c] \cap [c, b] = \{c\} \neq \varnothing$. Portanto, $[a, c] \cup (c, b]$ não é uma cisão.* $\square$

Teorema 5.2.4 *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista uma cisão não trivial para um intervalo I da reta, ou seja, exista $I = A \cup B$, com $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$ e $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Tome $a \in A$ e $b \in B$, digamos que $a < b$. Então, $[a, b] \in I$. Seja $c = \dfrac{a+b}{2}$ o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então, temos que $c \in A$ ou $c \in B$.
Sem perda de generalidade, suponha que $c \in A$. Logo, tome o intervalo $[a_1, b_1] = [c, b]$ e, por isso, $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $a_1 \in A$ e $b_1 \in B$. Repetindo o processo com o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$, construímos um intervalo $[a_2, b_2]$, de comprimento $d_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{4} = \dfrac{b-a}{2^2}$ tal que $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, com $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$.
Repetindo esse processo infinitamente, construímos uma cadeia de intervalos encaixados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$, , com $a_n \in A$ e $b_n \in B$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e cujo comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ é dado por $d_n = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
Assim, temos que existe $k \in I$ tal que $k \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim a_n = k$, segue que $k \notin B$, já que $k \in \overline{A}$. Analogamente, como $\lim b_n = k$, segue que $k \notin A$, já que $k \in \overline{B}$ e, portanto, $k \notin I$, o que é uma contradição.
$\blacksquare$

Corolário 5.2.2 *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\varnothing$ e $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto que é aberto e fechado ao mesmo tempo em $\mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{R} = A \cup A^C$ é uma cisão de $\mathbb{R}$ já que A é aberto e, por isso, A^C é fechado (consequentemente, $A \cap \overline{A^C} = A \cap A^C = \varnothing$) e A é fechado (consequentemente, $\overline{A} \cap A^C = A \cap A^C = \varnothing$).
Do Teorema 5.2.4 temos que a única cisão da reta real (que é um intervalo) é a cisão trivial e, portanto, $A = \varnothing$ ou $A = \mathbb{R}$. $\blacksquare$