7.2 Funções contínuas num intervalo

Teorema 7.2.1 *(Teorema do Valor Intermediário:) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Considere os conjuntos $A = \{x \in [a,b]; f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a,b]; f(x) \geq d\}$. Então, do Corolário 7.1.2, segue que A e B são conjuntos fechados e, consequentemente,

$$\overline{A} \cap B = A \cap B = A \cap \overline{B}.$$

Além disso, temos que $[a,b] = A \cup B$. Assim, suponha que $A \cap B = \emptyset$. Então, temos que A e B formam uma cisão para $[a,b]$ e como $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, segue do Teorema 5.2.4 uma contradição. Portanto, como $A \cap B \neq \emptyset$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$, terminando a demonstração do teorema. ■

Corolário 7.2.1 *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração: Sejam $\alpha = \inf f(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup f(I) = \sup\{f(x); x \in I\}$. Mostremos que $f(I)$ é o intervalo com extremos α e β. Para isso, considere qualquer número real d tal que $\alpha < d < \beta$. Assim, como $\alpha = \inf f(I)$, existe $a \in I$ tal que $\alpha \leq f(a)$. Reciprocamente, como $\beta = \sup f(I)$, existe $b \in I$ tal que $\beta \geq f(b)$.

Caso $d = f(a)$ ou $d = f(b)$ já temos o resultado. Por isso, podemos considerar que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$. Assim, pelo Teorema 7.2.1, existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$ e, por isso, $d \in f(I)$, provando que $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. É claro que $f(I) \subset (\alpha, \beta)$, visto que $\alpha = \inf f(I)$ e $\beta = \sup f(I)$ e, consequentemente, não existe nenhum número real menor do que α em $f(I)$ e não existe nenhum número real maior do que β em $f(I)$. Portanto, $f(I)$ é um intervalo. ■

Exemplo 7.2.1 *Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar, dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Mostre que p possui pelo menos uma raiz real.*

Solução: Façamos o caso onde $a_n > 0$, o outro caso é similar. Colocando $a_n x^n$ em evidência em $p(x)$, temos que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right).$$

Temos que se $q(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}$, então, $\lim_{x \to -\infty} q(x) = 1 = \lim_{x \to +\infty} q(x)$. Assim, como $\lim_{x \to -\infty} a_n x^n = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty$, segue do Corolário 7.2.1 que $p(\mathbb{R})$ é um intervalo e, por isso, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$ e, portanto, p possui pelo menos uma raiz real. ■

Observação 7.2.1 *a) Não há garantias que exista pelo menos uma raiz real num polinômio de grau par. Por exemplo, o polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $p(x) = x^2 + 1$ não possui raízes reais.*

b) *Seja I um intervalo. Se I não é um conjunto compacto, então, I não é fechado ou I não é limitado. Porém, não podemos tirar conclusões quanto ao intervalo $f(I)$, como veremos a seguir. Por exemplo, seja $f(x) = sen(x)$. Assim, observe que $f(I)$ admite diversas formas:*

- $I = (-\pi, \pi) \Rightarrow f(I) = [-1, 1]$;
- $I = (0, \pi) \Rightarrow f(I) =]0, 1]$;
- $I = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(I) =]0, 1[$.

Contudo, como veremos na próxima seção, se I for um conjunto compacto, então, $f(I)$ também será.

■

Exemplo 7.2.2 *(Existência de $\sqrt[n]{a}$:) Fixe $n \in \mathbb{N}$. Assim, a função $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida por $f(x) = x^n$ é crescente, visto que duas potências de mesmo expoente, quanto maior a base maior o seu valor. Consequentemente, f é injetiva, com $f(0) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

Logo, segue que $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ e, por isso, f é uma bijeção de $[0, +\infty[$ em si mesmo e, consequentemente, para todo $a \in [0, +\infty[$, existe um único $b \in [0, +\infty[$ tal que $a = b^n$, ou seja, $b = \sqrt[n]{a}$. Se n for ímpar, podemos substituir $[0, +\infty[$ por $\mathbb{R}$ que os comentários permanecem e, dessa forma, a raiz n-ésima de a existe para todo a.

■

Observe que o Teorema 7.2.1 é do tipo de "Existência", visto que, sob certas circunstâncias, ele garante a existência de uma raiz para a equação $f(x) = d$. Contudo ele não fornece uma fórmula para você obter essa raiz. O próximo exemplo, conhecido como a versão unidimensional do "Teorema do Ponto Fixo de Brouwer", também é dessa forma de garantir a existência. Primeiro, vamos definir o que chamamos de Ponto Fixo.

Definição 7.2.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Um número $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamado de Ponto Fixo.*

■

Exemplo 7.2.3 *(**Teorema Unidimensional do Ponto Fixo de Brouwer**) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \le a$ e $b \le f(b)$. Nessas condições, existe pelo menos um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Solução: Considere a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x - f(x)$. A função φ é contínua, visto que ela é a soma de funções contínuas e, além disso, $\varphi(a) \ge 0$ e $\varphi(b) \le 0$. $\varphi(a) = 0$ ou $\varphi(b) = 0$ temos o resultado. Caso contrário, pelo Teorema 7.2.1 existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi(c) = 0$ e, consequentemente, $f(c) = c$. ■

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ uma bijeção. Sendo f contínua, podemos concluir que sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua? A resposta é, em geral, negativa, como ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 7.2.4 *Seja $f:[-1,0]\cup(1,2]\to[0,4]$ a função definida por $f(x)=x^2$. Então, temos que f é uma bijeção e, além disso, f é contínua (por que?). A sua inversa é dada por $g(y)=-\sqrt{y}$, se $0\le y\le 1$ e $g(y)=\sqrt{y}$, se $1<y\le 4$ e, por isso, g é descontínua em 1, visto que $\lim\limits_{y\to 1^-} g(y)=-1$ e $\lim\limits_{y\to 1^+} g(y)=1$.*

■

O exemplo anterior nos mostra que só o fato de termos uma bijeção, sendo f uma função contínua, não é garantia de que a inversa também seja contínua. Precisamos de hipóteses adicionais, como veremos na próxima seção. Para chegar a esse resultado, mostraremos primeiro que uma bijeção contínua $f:I\to J$ entre intervalos tem inversa também contínua.

Teorema 7.2.2 *Seja I um intervalo. Toda função contínua injetiva $f:I\to\mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g:J\to I$, definida no intervalo $J=f(I)$ é contínua.*

Demonstração: Suponha inicialmente que $I=[a,b]$ e que $f(a)<f(b)$. Nesse caso, mostremos que f é crescente. Caso contrário, existem $x,y\in I$, com $x<y$, tal que $f(y)<f(x)$. Temos que $f(a)<f(y)$ ou $f(a)>f(y)$. Suponha que $f(a)<f(y)<f(x)$, então, do Teorema 7.2.1, existe $c\in(a,x)$ tal que $f(c)=f(y)$, o que é um absurdo, pois contraria o fato de f ser injetiva.

No segundo caso, temos que $f(y)<f(a)<f(b)$ e, novamente do Teorema 7.2.1, existe $c\in(y,b)$ tal que $f(c)=f(a)$, o que é um absurdo, contrariando a injetividade de f. Portanto, f é crescente.

Agora, considere $f:I\to\mathbb{R}$, onde I é um intervalo arbitrário. Se f não é monótona, existem $u,v,x,y\in I$ tais que $u<v$ e $x<y$, com $f(u)<f(v)$ e $f(x)>f(y)$. Seja $a=\min\{u,v,x,y\}$ e $b=\max\{u,v,x,y\}$. Então, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, injetiva e não monótona, contrariando a primeira parte da demonstração. Portanto, temos que $f:I\to\mathbb{R}$, onde I é um intervalo arbitrário, é monótona.

Por fim, considere a função $f:I\to J=f(I)$ contínua e monótona crescente, sobre um intervalo I qualquer. Assim, $g:J\to I$ é também crescente. Tome $a\in\mathring{I}$ e $b=f(a)$. Dado $\epsilon>0$, podemos supor que $(a-\epsilon,a+\epsilon)\subset I$ e, dessa forma, temos que $f(a-\epsilon)=b-\alpha$ e $f(a+\epsilon)=b+\beta$, onde $\alpha,\beta\in[0,+\infty[$. Considere $\delta=\min\{\alpha,\beta\}$. Como g é crescente,

$$y\in J, b-\delta<y<b+\delta\Rightarrow b-\alpha<y<b+\beta\Rightarrow g(b-\alpha)<g(y)<g(b+\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-\epsilon<g(y)<a+\epsilon\Rightarrow g \text{ contínua em } b.$$

Se a é um ponto extremo de I, então, b é um ponto extremo de J e, nesse caso, provamos de modo análogo, usando a definição de continuidade lateral, terminando a demonstração do resultado. (Como exercício faça a demonstração supondo que f é decrescente.) ■

Corolário 7.2.2 *Para todo $n\in\mathbb{N}$, a função $g:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, dada por $g(x)=\sqrt[n]{x}$ é contínua.*

Demonstração: Observe que g é a inversa da função contínua e injetiva $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, dada por $f(x)=x^n$. ■

Observação 7.2.2 *No caso particular de n ser um número ímpar no Corolário 7.2.2, podemos tomar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que o resultado se mantém.*

■

Para terminar essa seção, vamos definir *Homeomorfismo*.

Definição 7.2.2 *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Um* ***Homeomorfismo*** *entre X e Y é uma bijeção contínua $f : X \to Y$, cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua.*

■

Observação 7.2.3 *O Teorema 7.2.2 nos diz que se I é um intervalo, então, toda função contínua e injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo entre I e a sua imagem $J = f(I)$.*

■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.