Capítulo 3

Sistemas Lineares

Nesse capítulo estudaremos os *Sistemas de Equações Lineares*, formas de obtenção de soluções e a utilização de escalonamentos para obtenção de matrizes inversas. Comecemos introduzindo as primeiras definições e propriedades envolvendo sistemas lineares.

3.1 Escalonamento de Sistemas Lineares

Nessa seção estudaremos *Escalonamento de Matrizes.* Para isso precisarmos de um conjunto de resultados que apresentaremos a seguir, começando com a definição de *Equações Lineares.*

Definição 3.1.1 *Chamamos de **Equação Linear** a toda equação do tipo*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \text{ ou seja, } a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

*onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as **Variáveis** (ou **Incógnitas**), $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ são os **Coeficientes** (ou **Escalares**) e $b \in \mathbb{R}$ é o **Termo Independente** da equação.*

■

Vejamos alguns exemplos de equações lineares.

Exemplo 3.1.1 *São exemplos de equações lineares:*

a) $3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2$ *é uma equação linear nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 e termo independente $b = 2$.*

b) $2t_1 - t_2 + 3t_3 = 0$ *é uma equação linear nas variáveis t_1, t_2 e t_t e termo independente $b = 0$.*

c) $0x + 0y + 0z = 4$ *é uma equação linear nas variáveis x, y e z e termo independente $b = 4$.*

Por outro lado, não são exemplos de equações lineares:

a) $3x^2 + 2y + 5z = -3$, *visto que nessa equação aparece um termo quadrático (x^2);*

b) $2t_1t_2 + 3t_3 = 3$, *visto que nessa equação aparece um produto de duas variáveis independentes* (t_1t_2)*;*

c) $2\text{sen}(x) + 3y = 1$, *visto que nessa equação aparece uma função transcendente* ($\text{sen}(x)$)*.*

■

Agora valaremos de *Solução* de equação.

Definição 3.1.2 *Seja* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = b$ *uma equação linear. Então, uma* n*-upla* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ *ordenada de números reais é uma* ***Solução*** *da equação linear se a sentença*

$$\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^* + \cdots + \alpha_n x_n^* = b$$

for uma sentença verdadeira.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.2 *a) Se* $2x + 3y - z + w = 3$, *então,* $x^* = (1, 2, 3, -2)$ *é uma solução da equação, visto que* $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - (3) + (-2) = 3$.

b) Se $2x + 3y - z + w = 3$, *então,* $x^* = (1, 1, 2, 1)$ *não é uma solução da equação, visto que* $2 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - (2) + (1) = 4 \neq 3$.

c) Se $0x + 0y + 0z = 0$, *então, qualquer sequência* $x^* = (a, b, c)$ *é uma solução da equação, visto que* $0 \cdot (a) + 0 \cdot (b) + 0 \cdot (c) = 0$, *para qualquer sequência* (a, b, c) *de números reais.*

d) Se $0x + 0y + 0z + 0w = 2$, *então, não existe sequência* $x^* = (x, y, z)$ *que seja solução da equação, visto que* $0 \cdot (a) + 0 \cdot (b) + 0 \cdot (c) = 0 \neq 2$, *para toda sequência* (x, y, z) *de números reais.*

■

Agora, podemos definir o que chamamos de *Sistema de Equações Lineares.*

Definição 3.1.3 *Um* ***Sistema de Equações Lineares****, ou simplesmente* ***Sistema Linear****, é um conjunto formado por* m *equações lineares aplicadas nas mesmas* n *variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

■

Agora mostraremos como associar o estudo de matrizes com o estudo de sistemas lineares.

Observação 3.1.1 *Sejam* $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1$, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2$, $\cdots$, $\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m$ *as* m *equações lineares do sistema linear* s. *Então, podemos escrever* s *como a seguir:*

$$s : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}.$$

Além disso, considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

podemos representar o nosso sistema linear s como sendo uma equação envolvendo o produto de matrizes, ou seja,

$$s : Ax = b.$$

É importante destacar que nessa representação matricial de um sistema linear s, temos:

- *a matriz A é chamada de* ***Matriz dos Coeficientes*** *e é da ordem $m \times n$, mesma ordem do sistema linear s;*
- *a matriz x é chamada de* ***Vetor das Variáveis*** *e é da ordem $n \times 1$;*
- *a matriz b é chamada de* ***Vetor dos Termos Independentes*** *e é da ordem $m \times 1$.*

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.3 *a) Se* $s : \begin{cases} 2x + 3y & = & 4 \\ x - y & = & 2 \end{cases}$*, então, na representação matricial temos que o sistema linear $s : Ax = b$ fica dada por*

$$s : \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Se $s : \begin{cases} 3x + y - z & = & -2 \\ 2x + 5y + 7z & = & 0 \end{cases}$*, então, na representação matricial temos que o sistema linear $s : Ax = b$ fica dada por*

$$s : \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Se $s : \begin{cases} x + 2y + z & = & 12 \\ x - 3y + 5z & = & 1 \\ 2x - y + 3z & = & 10 \end{cases}$*, então, na representação matricial temos que o sistema linear $s : Ax = b$ fica dada por*

$$s : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

d) *Se* $s:\begin{cases} 2x-3y+3w &= 4\\ x-2y+4z-w &= 1\\ x+3z-2w+y &= 2\\ x-z+y-3w &= 5\end{cases}$*, então, colocando toas as variáveis de cada um das equações lineares do sistema linear* $s: Ax=b$ *na mesma ordem, obtemos* $s:$ $\begin{cases} 2x-3y+0z+3w &= 4\\ x-2y+4z-w &= 1\\ x+y+3z-2w &= 2\\ x+y-z-3w &= 5\end{cases}$ *e, como isso, a representação matricial do sistema linear* $s: Ax=b$ *fica dada por*

$$s:\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\\ 1\\ 2\\ 5\end{bmatrix}.$$

■

Reordenar as equações de um sistema linear s, como fizemos no último exemplo não é obrigatório. Contudo, isso nos ajudar a fixar as ideias e correr menos riscos na hora de montar as matrizes. Agora vamos estender a definição de solução de equação para um sistema linear.

Definição 3.1.4 *Seja* $s: Ax=b$ *um sistema linear* $m\times n$. *Dizemos que uma* n*-upla de números reais* $x^*=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ *é uma* ***Solução*** *para o sistema linear* s *se* x^* *for uma solução para todas as equações de* s.

■

De uma forma simples, podemos dizer que x^* é uma solução para um sistema linear $s: Ax=b$ de ordem $m\times n$, se a expressão $s: Ax^*=b$ for verdadeira. Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.4 *Se* $s:\begin{cases} x+y+z &= 6\\ 2x+y-z &= 1\\ 3x-y+z &= 4\end{cases}$*, então,* $(1,2,3)$ *é uma solução de* s*, visto que*

$$\begin{cases} 1+2+3 &= 6\\ 2.1+2-3 &= 1\\ 3.1-2+3 &= 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 6 &= 6\\ 1 &= 1\\ 4 &= 4\end{cases}$$

e sempre verdadeiro.

■

Exemplo 3.1.5 *Se* $s:\begin{cases} x+y+z &= 6\\ 2x+y-z &= 1\\ 3x-y+z &= 4\end{cases}$*, então,* $(-5,11,0)$ *não é uma solução de* s*, visto que*

$$\begin{cases} -5+11+0 &= 6\\ 2.(-5)+11-0 &= 1\\ 3.(-5)-11+0 &= 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 6 &= 6\\ 1 &= 1\\ -25 &= 4\end{cases}$$

não é uma equação verdadeira.

■

Agora vamos apresentar a forma que classificamos um sistema linear baseados no seu conjunto solução. Para isso, vamos iniciar distinguindo sistemas lineares que tem para os que não tem solução.

Definição 3.1.5 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$. Se s admite pelo menos uma solução, então, dizemos que s é um sistema linear* ***Possível*** *(ou* ***Compatível****). Caso contrário, dizemos que s é um sistema linear* ***Impossível*** *(ou* ***Incompatível****).*

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.6 *O sistema linear* $s : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ 2x+y-z & = & 1 \\ 3x-y+z & = & 4 \end{array} \right.$ *é possível, visto que* $(1,2,3)$ *é uma solução de s (veja Exemplo 3.1.4).*

■

Exemplo 3.1.7 *O sistema linear* $s : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+4y & = & 3 \\ 0x+0y & = & 1 \end{array} \right.$ *é impossível, visto que não existe* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $0x+0y=1$ *seja uma sentença verdadeira.*

■

Agora, vamos distinguir sistemas lineares possíveis com uma única solução dos que possuem mais de uma solução.

Definição 3.1.6 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$ compatível. Se s admite uma única solução, então, dizemos que s é um sistema linear possível e* ***Determinado****. Caso contrário, ou seja, se s tem mais do que uma solução, então, dizemos que s é um sistema linear possível e* ***Indeterminado****.*

■

Observação 3.1.2 *O nosso objetivo nesse capítulo é desenvolver ferramentas matemáticas que nos permita* ***Discutir*** *um sistema linear $s : Ax = b$ $m \times n$, ou seja, sermos capazes de dizer se s é impossível, possível e indeterminado ou possível e determinado.*

■

Vamos agora apresentar outras definições e propriedades importantes, começando com a definição de *Sistemas Lineares Homogêneos.*

Definição 3.1.7 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$. Dizemos que s é um sistema linear* ***Homogêneo*** *quando todos os seus termos independentes valem zero.*

■

Os termos independentes de um sistema linear $s : Ax = b$ de ordem $m \times n$, são os elementos que não estão multiplicados por variáveis. Com isso, a Definição 3.1.7 nos diz que um sistema linear homogêneo não possui número diferente de zero sem nenhuma variável o multiplicando. Além disso, podemos escrever simplesmente $s : Ax = 0$, $m \times n$. Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.8 *a) Se* $s : \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{cases}$*, então, s é um sistema linear homogêneo.*

b) Se $s : \begin{cases} 3x+4y+z+t &= 0 \\ 3x-y-3z &= 0 \\ x+2y+z-3t &= 0 \\ 4x-z+t &= 0 \end{cases}$*, então, s é um sistema linear homogêneo.*

■

Exemplo 3.1.9 *Se* $s : \begin{cases} 2x+3y-1 &= 0 \\ 3x-3y &= 0 \end{cases}$*, então, s não é um sistema linear homogêneo, visto que o termo independente da primeira equação vale* $1 \neq 0$.

■

Sistemas homogêneos são muito importantes, visto que eles são sempre determinados, como provaremos a seguir.

Teorema 3.1.1 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$ homogêneo. Então, s é um sistema linear possível.*

Demonstração: Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$ homogêneo. Então, cada linha $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, de s, é da forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ e, dessa forma, $x^* = (0, 0, \cdots, 0)$ é uma solução dessas equações, visto que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} 0 = 0, \ \forall \ i \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

que é verdade para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Portanto, o sistema linear homogêneo s é um sistema linear possível. ■

A próxima definição está relacionada com sistemas lineares que possuem o mesmo conjunto solução, chamados de *Sistemas Lineares Equivalentes.*

Definição 3.1.8 *Sejam $s_1 : Ax = b$ e $s_2 : Cx = d$ dois sistemas lineares $m \times n$. Então, dizemos que s_2 é* ***Equivalente*** *a s_1, e escrevemos $s_2 \sim s_1$, se s_1 e s_2 possuem o mesmo conjunto solução.*

■

Exemplo 3.1.10 *Se* $s_1 : \begin{cases} 3x+6y &= 42 \\ 2x-4y &= 12 \end{cases}$ *e* $s_2 : \begin{cases} x+2y &= 14 \\ x-2y &= 6 \end{cases}$*, então, $s_2 \sim s_1$, visto que eles possuem o mesmo conjunto solução* $S = \{(10, 2)\}$.

■

Dado um sistema linear $s : Ax = b$ $m \times n$, podemos criar uma novam matriz de $m \times n+1$, e representada por $[A \vdots b]$, acrescentando o vetor de termos independente após a última coluna de A. Essa nova matriz é muito importante e a definiremos como sendo a *Matriz Estendida*, como a seguir.

Definição 3.1.9 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$. Então, A é chamada de **Matriz Principal** do sistema linear s e $[A\vdots b]$ é chamada de **Matriz Estendida** do sistema linear s.*

■

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.1.11 *Se* $s : \begin{cases} 2x+3y-4z &= 5 \\ 3x+2y+z &= 1 \\ x-4y-3z &= 0 \end{cases}$ *, então, a matriz principal de s é a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ *e a matriz estendida de s é a matriz* $[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right]$.

■

O próximo passo é definir as *Operações Elementares sobre as Linhas* de um sistema linear s. Essa operações serão de grande importância na obtenção de matrizes equivalentes.

Definição 3.1.10 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$. Então, uma **Operação Elementar sobre Linhas** de s é uma das seguintes operações:*

1. *multiplicar uma linha i de s por um número real $c \neq 0$;*
2. *substituir uma linha i de s por essa linha somada a um múltiplo de outra linha j de s;*
3. *trocar duas linhas de s de posição.*

■

Operações elementares sobre as linhas de um sistema linear tem algumas propriedades interessantes, sendo uma das principais a existência de uma operação inversa do mesmo tipo, como destacaremos a seguir.

Observação 3.1.3 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$. Aplicando qualquer um das operações elementares sobre linhas de s, obtemos um novo sistema linear s' que, ao aplicarmos uma operação elementar sobre as linhas de s', do mesmo tipo da aplicada em s, podemos retornar a obter s, ou seja, as operações elementares sobre linhas de um sistema linear possuem operações inversas.*

■

Exemplo 3.1.12 *Sejam* $s : \begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ x-3y &= 4 \end{cases}$ *e* $s' : \begin{cases} x+\dfrac{3}{2}y &= \dfrac{5}{2} \\ x-3y &= 4 \end{cases}$. *Observe que s' pode ser obtido de s aplicando a operação elementar sobre as linhas de s trocando a linha L_1 por $\frac{1}{2}L_1$. Por outro lado, observe que s pode ser obtido de s' aplicando a operação elementar sobre as linhas de s' trocando a linha L_1' por $2L_1'$.*

■

As definições elaboradas para as operações elementares sobre linhas de um sistema linear podem ser estendidas para matrizes, como veremos na próxima observação.

Observação 3.1.4 *Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$. Como s está diretamente relacionado a matrizes, podemos considerar as operações elementares sobre as linhas de s como sendo operações elementares sobre as linhas de $[A \vdots b]$, onde $[A \vdots b]$ é a matriz estendida de um sistema linear. Assim, podemos falar das operações elementares sobre um sistema linear ou sobre uma matriz.*

De agora em diante, falaremos apenas operações elementares sobre linhas, que serve tanto para sistemas lineares quanto para matrizes.

■

O próximo passo é estabelecer o que são matrizes *Linha-Equivalentes*, que estão relacionadas a uma matriz B obtida de A, aplicando uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas.

Definição 3.1.11 *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de entradas reais. Dizemos que B é **Linha-Equivalente** a A se pudermos obter B de A aplicando uma sequência finita de operações elementares sobre linhas de A.*

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.13 *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então, A é linha-equivalente a matriz identidade.*

De fato: *Considere a sequência de operações elementares sobre linhas a seguir:*

1. *e_1: trocar L_3 por $L_3 - L_1$;*
2. *e_2: trocar L_3 por $L_3 + L_2$;*
3. *e_3: trocar L_3 por $\frac{1}{3}L_3$;*
4. *e_4: trocar L_2 por $L_2 - L_3$;*
5. *e_5: trocar L_1 por $L_1 - L_2$.*

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{e_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{e_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{e_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{e_4}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{e_5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Id.$$

□

Portanto, a matriz A é linha equivalente a matriz identidade de ordem 3.

■

Exemplo 3.1.14 *Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Obtenha a matriz B linha-equivalente a matriz A aplicando a seguinte cadeia de operações elementares:*

1. *e_1: trocar L_1 por $L_1 - 2L_2$;*
2. *e_2: trocar L_3 por $L_3 - 2L_2$;*
3. *e_3: trocar L_3 por $-\frac{1}{2}L_3$;*
4. *e_4: trocar L_1 por $L_1 + 9L_3$;*
5. *e_5: trocar L_1 por $\frac{2}{15}L_1$;*
6. *e_6: trocar L_3 por $L_3 - \frac{1}{2}L_1$;*
7. *e_7: trocar L_2 por $L_2 - 4L_3$.*

Solução: Observe que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \overset{e_1}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \overset{e_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \overset{e_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \overset{e_4}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \overset{e_5}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \overset{e_6}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \overset{e_7}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz B linha-equivalente a matriz A aplicando a cadeia de operações elementares fornecida é:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

■

Agora vamos definir o que são matrizes *Linhas Reduzidas.*

Definição 3.1.12 *Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é dita ser **Linha Reduzida** se:*

1º- O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula de A vale 1;

2º- Cada coluna de A que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha de A possui todos os outros elementos valendo zero.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.15 *a) A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha reduzida. Generalizando, qualquer matriz identidade é uma matriz linha reduzida.*

b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha reduzida.*

c) A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ *do Exemplo 3.1.14 é uma matriz linha reduzida.*

d) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha reduzida.*

■

Observação 3.1.5 *É importante ressaltar, que aplicando operações elementares sobre linhas de qualquer matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*, sempre podemos obter uma matriz* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *linha reduzida tal que* $B \sim A$*.*

■

Agora podemos definir que são *Linha Reduzida à Forma Escada.*

Definição 3.1.13 *Uma matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *é dita ser* ***Linha Reduzida à Forma Escada*** *se:*

a) A é linha reduzida;

b) todas as linhas nulas de A estão abaixo de todas as linhas não nulas de A;

c) Sejam $1, 2, \cdots, k$ *as linhas não nulas de A. Se* A_i *são os índices das colunas de A onde o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre, então,* $A_1 < A_2 < \cdots < A_k$*.*

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.16 *a) Qualquer matriz identidade é uma matriz linha reduzida à forma escada.*

b) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha reduzida à forma escada.*

c) A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *não é uma matriz linha reduzida à forma escada. Contudo, a matriz* B *linha equivalente a matriz* A *dada por* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha reduzida à forma escada.*

d) A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\dfrac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \dfrac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{5}{3} \end{bmatrix}$ *do Exemplo 3.1.14 não é uma matriz linha reduzida à forma escada. Contudo, a matriz* C *linha equivalente a matriz* B *dada por* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{11}{3} \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha reduzida à forma escada.*

■

Exemplo 3.1.17 *Obtenha a matriz* B *linha reduzida à forma escada da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Para obtermos a matriz B reduzida à forma escada de A, precisamos efetuar um conjunto de operações elementares sobre linhas na matriz A. Assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_3 \to L_1 \\ L_1 \to L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 + L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{L_2 \to L_2 - L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -12 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - 4L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 19 & 52 & 23 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{L_3 \to 2L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 52 & 23 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 + 4L_3 \\ L_4 \to L_4 - 19L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -92 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 432 & 118 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{L_4 \to \frac{L_4}{432}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -92 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{59}{216} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_1 \to L_1 - 23L_4 \\ L_2 \to L_2 + 92L_4 \\ L_3 \to L_3 + 20L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{155}{216} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{54} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{25}{54} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{59}{216} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz B reduzida à forma escada da matiz A, é a matriz dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{155}{216} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{54} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{25}{54} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{59}{216} \end{bmatrix}.$$

■

Agora, podemos definir *Sistemas Lineares Escalonados.*

Definição 3.1.14 *Seja $s : AX = b$ um sistema linear $m \times n$. Então, dizemos que s está na* ***Forma Escalonada*** *quando a matriz estendida $[A \vdots b]$ de s tem todos os elementos abaixo de qualquer elemento da forma $a_{kk}x_k$, nas linhas $i > k$ valendo zero.*

■

Usando de um abuso de linguagem, podemos considerar a "diagonal principal" da matriz estendida $[A \vdots b]$ como sendo a diagonal formada por todos os elementos da forma $a_{kk}x_k$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Com isso, a definição anterior nos diz que, novamente usando um abuso de linguagem, que uma matriz está na forma escalonada quando a sua matriz estendida $[A \vdots b]$ está na forma escada. É importante ressaltar que das propriedades anteriores, todo sistema linear s é equivalente a um sistema linear escalonados s'. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.18 *Exemplos de sistemas lineares na forma escalonada:*

a) $s : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \quad\;\; y = -2 \end{cases};$ *b)* $s : \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ \quad\;\; 3y + z = 5 \\ \qquad\quad\; z = 1 \end{cases}.$

■

Observação 3.1.6 *Seja $s : AX = b$ um sistema linear $m \times n$. Para escalonarmos o sistema linear s, precisamos aplicar as operações elementares sobre linhas na matriz estendida* $[A\vdots b]$.

■

Vejamos mais exemplos.

Exemplo 3.1.19 *Encontre o sistema linear escalonado s' equivalente ao sistema linear* $s : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 5 \end{array}\right.$.

Solução: A matriz estendida $[A\vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s : \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right]$.

Dessa forma, para obtermos a matriz escalonada de $[A\vdots b]$, precisamos aplicar as operações elementares sobre a matriz estendida. Assim, como

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

segue que o sistema linear s' escalonado do sistema linear s é dado por

$$s' : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right. .$$

■

Exemplo 3.1.20 *Encontre o sistema linear escalonado s' equivalente ao sistema linear* $s : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$.

Solução: A matriz estendida $[A\vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s : \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

Dessa forma, para obtermos a matriz escalonada de $[A\vdots b]$, precisamos aplicar as operações elementares sobre a matriz estendida. Assim, como

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \to 7L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & 9 \end{array}\right],$$

segue que o sistema linear s' escalonado do sistema linear s é dado por

$$s' : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & -3 \\ & & & & 16z & = & 9 \end{array}\right. .$$

■

Exemplo 3.1.21 *Encontre o sistema linear escalonado s' equivalente ao sistema linear* $s: \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$.

Solução: A matriz estendida $[A \vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s: \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$.

Dessa forma, para obtermos a matriz escalonada de $[A \vdots b]$, precisamos aplicar as operações elementares sobre a matriz estendida. Assim, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_3 \to L_1 \\ L_1 \to L_3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \to 8L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 30 \end{array}\right],$$

segue que o sistema linear s' escalonado do sistema linear s é dado por

$$s': \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \quad - 8y = -2 \\ \quad\quad 0 = 30 \end{cases}.$$

■

Exemplo 3.1.22 *Encontre o sistema linear escalonado s' equivalente ao sistema linear* $s: \begin{cases} x + 4y = -8 \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$.

Solução: A matriz estendida $[A \vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s: \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -8 \\ 3 & -1 & 15 \\ 10 & -12 & 7 \end{array}\right]$.

Dessa forma, para obtermos a matriz escalonada de $[A \vdots b]$, precisamos aplicar as operações elementares sobre a matriz estendida. Assim, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -8 \\ 3 & -1 & 15 \\ 10 & -12 & 7 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 10L_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -8 \\ 0 & -13 & 39 \\ 0 & -52 & 87 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \to 13L_3 - 52L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -8 \\ 0 & -13 & 39 \\ 0 & 0 & -897 \end{array}\right],$$

segue que o sistema linear s' escalonado do sistema linear s é dado por

$$s': \begin{cases} x + 4y = -8 \\ \quad - 13y = 39 \\ \quad\quad 0 = -897 \end{cases}.$$

■

Agora vamos apresentar a definição de *Escalonamento Completo* de um sistema linear $s: Ax = b$.

Definição 3.1.15 *Seja $s : AX = b$ um sistema linear $m \times n$. Dizemos que o sistema linear s é **Resolvido por Escalonamento** quando a sua matriz estendida $[A \vdots b]$ está linha reduzida à forma escada.*

■

Agora vamos apresentar alguns exemplos de resolução de sistemas lineares por escalonamento. Na próxima seção apresentaremos outra forma de obtermos a solução de um sistema linear.

Exemplo 3.1.23 *Resolva o sistema linear* $s : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$ *por escalonamento.*

Solução: A matriz estendida $[A \vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right]$.

Dessa forma, para obtermos a matriz linha reduzida à forma escada de $[A \vdots b]$, precisamos aplicar as operações elementares sobre a matriz estendida. Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{L_3 \to \frac{1}{2} L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_2 \to L_2 - L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto, a solução do sistema linear s fica dada por $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$. ■

Exemplo 3.1.24 *Resolva o sistema linear* $s : \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ -2x - 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y - 3z = 6 \end{cases}$ *por escalonamento.*

Solução: A matriz estendida $[A \vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s : \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right]$.

Dessa forma, para obtermos a matriz linha reduzida à forma escada de $[A \vdots b]$, precisamos aplicar as operações elementares sobre a matriz estendida. Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 + 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to L_3 + 6L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \to \frac{1}{2} L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L_1 \to L_1 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Portanto, a solução do sistema linear s fica dada por $x = 3$, $y = \dfrac{3}{2}$ e $z = 5$. ■

Exemplo 3.1.25 *Resolva o sistema linear* $s : \begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ 12z - 6t = 30 \end{cases}$ *por escalonamento.*

Solução: A matriz estendida $[A \vdots b]$ do sistema linear s é dada por: $s : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & 30 \end{array}\right]$.

Assim,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & 30 \end{array}\right] \overset{L_3 \to \frac{1}{12}L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_2 \to -L_2 - 4L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/2 \end{array}\right] \overset{L_1 \to L_1 + 3L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 5/2 \end{array}\right].$$

Assim, temos que

$$s : \left[\begin{array}{cccc|c} x & + & t/2 & = & 1/2 \\ y & - & t & = & 3 \\ z & - & t/2 & = & 5/2 \end{array}\right].$$

Assim, deixando a solução do sistema linear $s : Ax = b$ em função da variável t, temos que $x = \dfrac{1-t}{2}$, $y = 3 + t$, $z = \dfrac{5+t}{2}$ e $t \in \mathbb{R}$. ■

Nos exemplos anteriores procuramos a solução dos sistemas lineares sem verificarmos se existia, ou não, solução, ou seja, sem uma discussão de $s : Ax = b$. Agora daremos mais um passo nessa direção. Para isso, vamos definir o *Posto*, ou *Característica*, de uma matriz, que está relacionada com o número de linhas não nulas da matriz linha reduzida à forma escada equivalente a matriz dada. O posto da matriz vai nos ajudar a estabelecer uma forma de discussão dos sistemas lineares.

Definição 3.1.16 *Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz e seja B a matriz linha reduzida à forma escada equivalente a matriz A. Então, o* ***Posto****, ou a* ***Característica****, da matriz A, denotado por $\rho(A)$ é dado pelo número de linhas não nulas da matriz B linha reduzida à forma escada equivalente a A.*

■

Observação 3.1.7 *Podemos tomar uma versão mais fraca dessa definição, considerando B como sendo a matriz escalonada equivalente a A.*

■

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.26 *a) Sendo* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$*, temos que a matriz* B *escalonada equivalente a* A *é dada por* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$*. Dessa forma, temos que* $\rho(A) = 2$.

b) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$*, temos que a matriz* B *escalonada equivalente a* A *é dada por* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*. Dessa forma, temos que* $\rho(A) = 2$.

c) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$*, temos que a matriz* B *escalonada equivalente a* A *é dada por* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$*. Dessa forma, temos que* $\rho(A) = 3$.

d) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$*, temos que a matriz* B *escalonada equivalente a* A *é dada por* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*. Dessa forma, temos que* $\rho(A) = 1$.

■

Agora apresentaremos um teorema que nos ajudará a discutir um sistema linear escalonado, conhecendo o posto da matriz principal e a matriz estendida relacionada com ela.

Teorema 3.1.2 *(**Teorema de Rouché-Capelli:**) Seja* $s : Ax = b$ *um sistema linear* $m \times n$*. Então, temos que* s *é um sistema linear possível se, e somente se,* $\rho(A) = \rho\left([A \vdots b]\right)$*. Além disso, temos que* s *é determinado se, e somente se,* $\rho(A) = n$.

Demonstração: Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $m \times n$ e seja $s' : A'x = b'$ o sistema linear escalonado de s. Dessa forma, temos que A' é a matriz escalonada da matriz A e $[A' \vdots b']$ é a matriz escalonada da matriz estendida $[A \vdots b]$. Como $[A \vdots b]$ tem uma coluna a mais do que A, segue que $\rho(A) \leq \rho\left([A \vdots b]\right)$. Se vale a desigualdade estrita, segue que $[A' \vdots b']$ tem uma linha da forma $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \vdots c]$, com $c \neq 0$. Consequentemente, $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c$ se, e somente se, o sistema linear s é impossível. Portanto, s é um sistema linear possível se, e somente se, $\rho(A) = \rho\left([A \vdots b]\right)$.

A parte do determinado não será demonstrada nessas notas. ■

Vamos aos exemplos. Aqui terminamos essa seção, na próxima estudaremos a *Regra de Cramer*[1] para resolução de sistemas lineares.

Exemplo 3.1.27 *Discuta o sistema linear* $s: \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

Solução: Seja $[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$ a matriz estendida do sistema linear s.

Assim, a matriz $[A'\vdots b']$ linha equivalente a forma escada de $[A\vdots b]$ fica dada por

$$[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{\substack{L_2 \to 1/5L_2 \\ L_3 \to 1/5L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_1 \to L_1 + 2L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -6/5 \end{array}\right].$$

Dessa forma, como $\rho\left([A\vdots b]\right) = 3$ e $\rho(A) = \rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 = \rho\left([A\vdots b]\right)$, seque que s é um sistema linear possível e determinado. A solução de s é dada por $x = \frac{9}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$, $z = -\frac{6}{5}$. ■

Exemplo 3.1.28 *Discuta o sistema linear* $s: \begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$.

Solução: Seja $[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$ a matriz estendida do sistema linear s.

Assim, a matriz estendida $[A'\vdots b']$ linha equivalente a forma escada de $[A\vdots b]$ fica dada por

$$[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 + 3L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim$$

[1]Gabriel Cramer (1704-1752) foi um matemático suíço. Filho de um médico, tinha dois irmãos. Em 1722 obteve na Universidade de Genebra o título de doutor por seu trabalho na área da acústica. Em 1724 tornou-se professor de matemática e de filosofia da Universidade de Genebra. Dedicou especial atenção à teoria das curvas. A sua obra mais importante foi *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (1750). Ocupou-se também da origem, forma e movimento dos planetas. É famosa a regra para solução de sistemas de equações lineares que tem o seu nome

$$\underset{\sim}{\substack{L_2 \to 1/8L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/8 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \to 3L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/8 & 5/8 \\ 0 & 1 & -1/8 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dessa forma, como $\rho\left([A\vdots b]\right) = 2$ e $\rho(A) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right) = 2 = \rho\left([A\vdots b]\right)$, seque que s é um sistema linear possível e indeterminado. Assim, deixando a solução do sistema linear $s : Ax = b$ em função da variável z, temos que $x = \dfrac{5(1-z)}{8}$, $y = \dfrac{7+z}{8}$ e $z \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 3.1.29 *Discuta o sistema linear* $s : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$.

Solução: Seja $[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$ a matriz estendida do sistema linear s.

Assim, a matriz estendida $[A'\vdots b']$ linha equivalente a forma escada de $[A\vdots b]$ fica dada por

$$[A\vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{L_2 \to -1/2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_2 - L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Dessa forma, como $\rho\left([A\vdots b]\right) = 3$ e $\rho(A) = \rho\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right) = 2 \neq \rho\left([A\vdots b]\right)$, seque que s é um sistema linear impossível. ■

Agora, faça alguns exercícios.

3.2 Exercícios

Exercício 3.2.1 *Escreva na forma de matriz cada um dos sistemas lineares a seguir. Além disso, escreva a matriz estendida do sistema linear s e encontre o posto da matriz dos coeficientes e da matriz estendida.*

a) $s : \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & - & 5y & = & 2 \end{array}\right.$;

b) $s : \left\{\begin{array}{ccccc} 6x & + & 2y & = & 9 \\ 2x & - & 7y & = & 1 \end{array}\right.$;

c) $s : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & + & 5y & = & 9 \end{array}\right.$;

d) $s: \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = -6 \\ 4x + y = 3 \end{cases};$

e) $s: \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -x - 5y = -6 \\ 5x + 12y = 17 \end{cases};$

f) $s: \begin{cases} x + 5y + z = 3 \\ 3x + 4y = 2 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases};$

g) $s: \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ -2x + y - 5z = -15 \end{cases};$

h) $s: \begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 7x - 2y + 3z = 8 \\ 2x - 5y + 11z = 8 \end{cases};$

i) $s: \begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ 2x - 2y + 2z - 2t = 10 \\ 3x + 3y - 3z - 3t = 15 \\ 4x + 4y + 4z - 4t = 20 \end{cases}.$

Exercício 3.2.2 *Encontre a matriz linha reduzida à forma escada de cada uma das matrizes a seguir.*

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix};$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix};$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & 3 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix};$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 & 7 \end{bmatrix};$

e) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 11 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

Exercício 3.2.3 *Discuta e encontre, se existir, uma solução para cada um dos sistemas lineares a seguir por escalonamento.*

a) $s: \begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 5y = 2 \end{cases};$

b) $s: \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases};$

c) $s: \begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ x - 3y = -1 \end{cases};$

d) $s: \begin{cases} x + 3y = 4 \\ -5x - 15y = 10 \end{cases};$

e) $s: \begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases};$

f) $s: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 12 \end{cases};$

g) $s: \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases};$

h) $s: \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases};$

i) $s: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = -1 \\ 3x + y - z = -3 \end{cases};$

j) $s: \begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - y = 9 \\ x + y = 1 \\ 5x + 7y = -10 \end{cases};$

k) $s: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 27 \end{cases};$

$$l)\ \ s:\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = -3 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} ;\ m)\ \ s:\begin{cases} x + y + z - 2t = 5 \\ 2x + y - z + 3t = 3 \\ 3x + 3y - 3z - 3t = 12 \\ 2x + 2y + z - t = 4 \end{cases}.$$

$$n)\ \ s:\begin{cases} 3x + 2y + z + t = 1 \\ 3y + z - t = 10 \\ 2z - 3t = -5 \end{cases}.$$