1.9 Comprimento de Arco

Agora, vamos definir formalmente o que chamamos de Curva.

Definição 1.9.1 *Considere um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Chamamos de Curva $\boldsymbol{c} \subset \mathbb{R}^n$, definida em I a função*

$$\boldsymbol{c} : I \to \mathbb{R}^n.$$

Observação 1.9.1 *Em outras palavras, a Definição 1.9.1 diz que qualquer função vetorial contínua $\vec{f}(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$, com $t \in I$, é uma curva. Ou seja, uma curva é o lugar geométrico dos pontos $P \in \mathbb{R}^n$ que tem valor posição $\vec{f}(t)$, com $t \in I$.*

Além disso, a Definição 1.9.1 nos diz que uma curva é a imagem de uma função vetorial e, por isso, a representação geométrica da curva é o desenho do conjunto imagem dessa função.

Quando estivermos no espaço euclidiano, uma curva é dada por uma equação vetorial da forma $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e sua representação gráfica será no espaço euclidiano, como veremos na Figura 1.6.

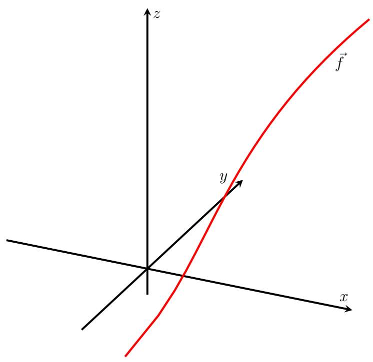

Figura 1.6: Ilustração de uma curva no Espaço Euclidiano.

Uma aplicação óbvia pode ser vista com o movimento de corpos. Por exemplo, se $\vec{f}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, então, a curva **Cc** coincide com a trajetória da partícula.

Definição 1.9.2 *Sejam*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

funções contínuas de uma variável t, definidas para $t \in [a, b]$. Então, as Equações (1.1) são chamadas de Equações Paramétricas de uma curva e t é chamado de Parâmetro.

Com as equações paramétricas de uma curva, é possível obter uma equação vetorial para a mesma, basta considerar o vetor posição $\vec{f}(t)$ de cada ponto da curva, como visto na Figura 1.7

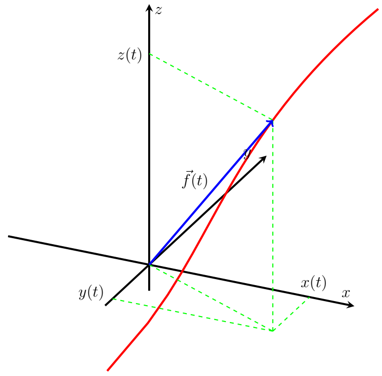

Figura 1.7: Representação paramétrica de uma curva

As componentes de $\vec{f}(t)$, em cada tempo $t \in I$, são as coordenadas do ponto no instante. Portanto, a curva fica dada por

$$\vec{f}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)).$$

Exemplo 1.9.1 *A equação vetorial $\vec{r}(t) = (t, t, t)$ representa uma reta cujas equações paramétricas são dadas por*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \\ z(t) = t \end{cases}.$$

Um esboço dessa curva é dado pela Figura 1.8.

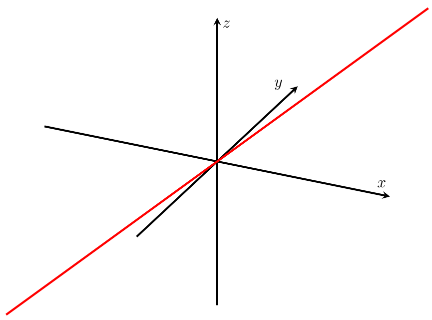

Figura 1.8: Representação gráfica da curva $\vec{r}(t) = (t, t, t)$.

■

Exemplo 1.9.2 *As equações paramétricas*

$$\begin{cases} x(t) = 2cos(t) \\ y(t) = 2sen(t) \\ z(t) = 3t \end{cases}.$$

representa uma hélice circular. Sua equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), 3t).$$

Um esboço desta curva é dada pela Figura 1.9.

■

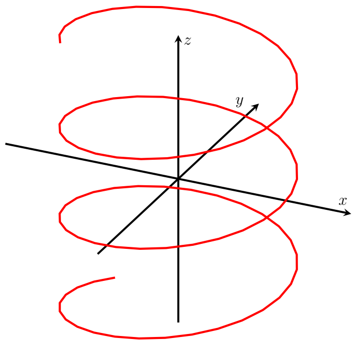

Figura 1.9: Representação gráfica da hélice circular $\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), 3t)$.

Exemplo 1.9.3 *A equação vetorial* $\vec{r}(t) = (t, t^2, 3)$ *representa uma parábola, pois* $y = x^2$ *e* $z = 3$. *Suas equações paramétricas são*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 3 \end{cases}.$$

Um esboço desta curva é dado pela Figura 1.10.

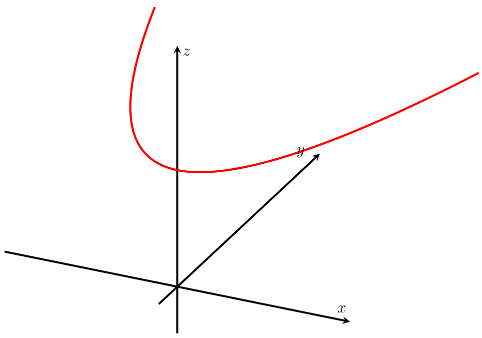

Figura 1.10: Representação gráfica da parábola $\vec{r}(t) = (t, t^2, 3)$.

■

No Curso de Cálculo forma estudadas outras curvas, por exemplo, as senoides, tangentoides, exponenciais, logarítmicas, etc. Aqui, vamos rever a curva arco-tangente.

Exemplo 1.9.4 *Seja* $c : (t, arctg(t))$, *com* $t \in \mathbb{R}$. *Determine a imagem de* c *uma segunda curva* r *tal que* $Im_c = Im_r$.

Solução: Considere $x = t$. Então, temos que $y = \text{arctg(x)}$ e, por isso, a curva c é a curva arco-tangente. Dessa forma, temos que um esboço da curva c fica dado pela Figura 1.11.
Uma curva r tal que $Im_c = Im_r$ pode ser obtida por $c : (t^n, \text{arctg}(t^n))$, com $n \in \mathbb{Z}$ e n sendo um número ímpar. ■

Agora vamos apresentar outras definições úteis sobre curvas, começaremos com as que podem ser representada num plano.

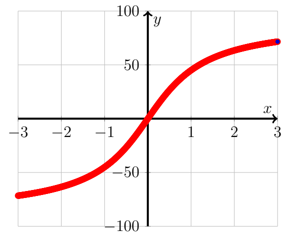

Figura 1.11: Representação gráfica da função $c : (t, \operatorname{arctg}(t))$.

Definição 1.9.3 *Uma Curva Plana é uma curva cuja imagem pode ser representada totalmente num plano do espaço. Uma curva que não é plana é chamada de Curva Reversa.*

Exemplo 1.9.5 *Conhecemos muitas curvas, sendo que quase todas são planas. Vejam alguns exemplos.*

a) A reta, a parábola, a hipérbole, a senoide, a tangentoide e a circunferência são alguns exemplos de curvas planas;

b) A hélice circular é uma curva reversa.

■

Podemos ter ainda outras definições. Por exemplo, podemos ter curvas fechadas ou abertas, podemos ter curvas simples ou com alto intersecção, entre outras. Vejam a próxima definição.

Definição 1.9.4 *Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, com $t \in [a, b]$, é dita ser uma Curva Fechada se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, caso contrário ela é chamada de Curva Aberta.*

Definição 1.9.5 *Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, com $t \in [a, b]$, é dita ser uma Curva Simples se $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in]a, b[$. Caso contrário dizemos que a curva é Não-Simples ou que a curva tem Alto-Intersecção.*

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 1.9.6 *Observe a Figura 1.12.*

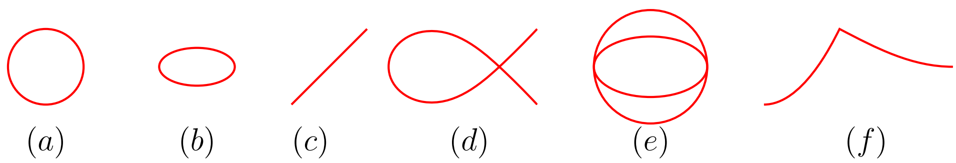

Figura 1.12: Representação da curvas no plano.

Dessa forma, temos que:

- *As curvas ilustradas em (a), (b) e (e) são exemplos de curvas fechadas;*
- *As curvas ilustradas em (c), (d) e (f) são exemplos de curvas abertas;*

- *As curvas ilustradas em (a), (b), (c) e (f) são exemplos de curvas simples;*
- *As curvas ilustradas em (d) e (e) são exemplos de curvas com alto-interseção.*

■

Agora, vamos desenvolver uma forma de calcular o *Comprimento* de uma curva. A ideia que utilizaremos aqui é aproximar a medida de cada arco por segmentos de reta. Considere uma curva $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável cuja representação gráfica é dada pela Figura 1.13. Considere também uma partição $P = a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ para o intervalo I.

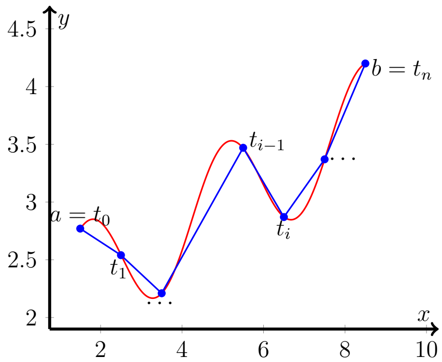

Figura 1.13: Representação gráfica de uma curva c.

Dessa forma, podemos considerar o segmento de reta $\overline{t_{i-1}t_i}$, que liga os pontos t_{i-1} a t_i, sendo que a medida desse segmento pode ser usado como uma aproximação para a medida do comprimento da curva $\widehat{t_{i-1}t_i}$, entre os pontos t_{i-1} a t_i. Assim, temos que

$$||\overline{t_{i-1}t_i}|| \approx ||\widehat{t_{i-1}t_i}||.$$

Fazendo a soma dessas aproximações para todos os intervalos obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} ||\overline{t_{i-1}t_i}||,$$

que é a Soma de Riemann para a medida do comprimento da curva c de a até b. Como a curva é diferenciável, pelo Teorema do Valor médio, temos que $||\overline{t_{i-1}t_i}|| = ||c'(\varsigma_i)||\Delta_i$, onde $\varsigma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$. Desta forma, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} ||\overline{t_{i-1}t_i}|| = \sum_{i=1}^{n} ||c'(\varsigma_i)||\Delta_i.$$

Assim, quando o limite dessa soma de Riemann existe, ele é a integral definida da função $||c'(\varsigma_i)||$ de a até b e, por isso, essa integral é chamada de *Comprimento da Curva* c, de a até b, como visto a seguir.

Definição 1.9.6 *Seja $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva com derivada contínua em I. Definimos o Comprimento $L(c)$ da curva em I é dado por*

$$L(c) = \int_a^b ||c'(t)||dt.$$

Exemplo 1.9.7 *Calcule o comprimento das curvas a seguir, no intervalo indicado.*

a) $c : (\cos(t), sen(t), t)$, com $t \in [0, 2\pi]$;

b) $c : (t, t^2, 2)$, com $t \in [-2, 2]$;

Solução:

a) Temos que $c(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$. Assim,

$$c'(t) = (-\text{sen}(t), \cos(t), 1)$$

e, consequentemente,

$$||c'(t)|| = \sqrt{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = \sqrt{2}t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2}\ u.c.$$

b) Como

$$c(t) = (t, t^2, 2),$$

Segue que

$$c'(t) = (1, 2t, 0) \Rightarrow ||c'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Desta forma, temos que

$$L(c) = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4t^2}dt = 2\int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4} + t^2}dt =$$

$$= 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + t^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\ln\left(\left|t + \sqrt{\frac{1}{4} + t^2}\right|\right)\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{t}{2}\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{2t + \sqrt{1 + 4t^2}}{2}\right|\right)\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4 + \sqrt{17}}{2}\right)\right) - \left(-\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{-4 + \sqrt{17}}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{17} + \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{4 + \sqrt{17}}{2}\right) - \ln\left(\frac{-4 + \sqrt{17}}{2}\right)\right) = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(4 + \sqrt{17}).$$

■

Observação 1.9.2 *Seja c uma curva dada pela equação vetorial*

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)), \ t \in [a, b].$$

Dessa forma,

$$||c'(t)|| = \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2},$$

e, por isso, temos que o comprimento da curva $L(c)$ fica dado por

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2} dt.$$

Exemplo 1.9.8 *Calcule o comprimento do arco da curva cuja equação vetorial é*

$$\vec{r}(t) = (t, t^{\frac{2}{3}}), \ 1 \leq t \leq 4.$$

Solução: O comprimento de arco $L(c)$ da curva é dado por

$$L(c) = \int_1^4 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Assim, como

$$\vec{r}'(t) = \left(1, \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 9t^{\frac{2}{3}}}{9t^{\frac{2}{3}}}} = \frac{\sqrt{4 + 9t^{\frac{2}{3}}}}{3t^{\frac{1}{3}}},$$

segue que

$$L(c) = \int_1^4 \frac{\sqrt{4 + 9t^{\frac{2}{3}}}}{3t^{\frac{1}{3}}} dt.$$

Chamando $u = 4 + 9t^{\frac{2}{3}}$, temos que $du = 6t^{-\frac{1}{3}} dt$ e, substituindo na integral, chegamos a

$$L(c) = \int_1^4 \frac{\sqrt{u}}{18} du = \left(\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{27}\left(\sqrt{4 + 9t^{\frac{2}{3}}}\right)^3\Bigg|_1^4.$$

Portanto,

$$L(c) = \frac{1}{27}\left[\left(\sqrt{18\sqrt[3]{2} + 4}\right)^3 - 13\sqrt{13}\right] \ u.c..$$

■

Exemplo 1.9.9 *Calcule o comprimento de arco da hélice circular $c(t) = (\cos(t), sen(t), t)$, com $0 \leq t \leq 1$.*

Solução: Temos que $c'(t) = (-\text{sen}(t), \cos(t), 1)$ e, por isso,

$$||c'(t)|| = \sqrt{(-\text{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Assim, o comprimento da hélice circular $L(c)$ fica dado por

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}t\Big|_0^1 = \sqrt{2}\ u.c.$$

■

Exemplo 1.9.10 *Encontre o comprimento de arco da hélice circular $\vec{r}(t) = (cos(t), sen(t), t)$, do ponto $A = (1,0,0)$ ao ponto $B = (-1,0,\pi)$.*

Solução: Como $z(t) = t$ e desejamos encontrar o comprimento de arco $L(c)$ do ponto $A = (1,0,0)$ ao ponto $B = (-1,0,\pi)$, temos que $0 \leq t \leq \pi$. Além disso, $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-sen(t), cos(t), 1)$ e, por isso, temos que

$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|\right| = \sqrt{(-sen(t))^2 + cos^2(t) + 1^2} = \sqrt{sen^2(t) + cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}.$$

Daí,

$$L(c) = \int_0^\pi \sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_0^\pi dt = \pi\sqrt{2}\ u.c..$$

■

Observação 1.9.3 *Na integral $L(c) = \displaystyle\int_a^b ||c'(t)||dt$, se o limite superior b é substituído por um limite variável t, com $t \in [a,b]$, a integral torna-se*

$$s(t) = \int_a^t ||c'(t^*)||dt^*.$$

A função $s = s(t)$ é chamada de Função Comprimento de Arco e ela mede o comprimento de arco da curva c no intervalo $[a,t]$.

Exemplo 1.9.11 *Escreva a função comprimento de arco de uma circunferência de raio r.*

Solução: Na definição de função comprimento de arco temos que a é um ponto do domínio de f e, por isso, podemos tomar qualquer ponto arbitrário a. Assim, tome $a = 0$. Temos que uma circunferência é dada por $\vec{r}(t) = (rcos(t), rsen(t))$, com $t \in [0,2\pi]$. Dessa forma, como $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-rsen(t), rcos(t))$, segue que

$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|\right| = \sqrt{r^2sen^2(t) + r^2cos^2(t)} = \sqrt{r^2} = r.$$

Portanto,

$$s(t) = \int_0^t rdt^* = r\int_0^t dt^* = rt.$$

■

Exemplo 1.9.12 *Encontre a função comprimento de arco da hélice circular* $\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), t)$.

Solução: Tome $a = 0$. Além disso, como $\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), t)$, segue que $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-2sen(t), 2cos(t), 1)$ e, por isso,

$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|\right| = \sqrt{4sen^2(t) + 4cos^2(t) + 1} = \sqrt{5}.$$

Assim,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{5}dt^* = \sqrt{5}\int_0^t dt^* = \sqrt{5}t.$$

■

Observação 1.9.4 *As vezes é conveniente parametrizar uma curva pelo seu comprimento de arco. Para reparametrizar uma curva suave* C*, dada por* $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$*, com* $t \in [a, b]$*, proceda como a seguir:*

i. Calcule $s = s(t)$*;*

ii. Encontre a sua inversa $t = t(s)$*,* $0 \leq s \leq l$*;*

iii. Reescreva a função $\vec{r}$ *como sendo* $\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$*, com* $s \in [0, l]$*.*

Temos que $\vec{h}(s)$ *representa a mesma curva* c *dada por* $\vec{r}(t)$*, mas com uma nova parametrização, em que a variável* s*,* $0 \leq s \leq l$*, representa o comprimento de arco de* c*.*

Exemplo 1.9.13 *Reparametrize pelo comprimento de arco a curva* $c : \vec{r}(t) = (rcos(t), rsen(t))$*, com* $0 \leq t \leq 2\pi$*.*

Solução: No Exemplo 1.9.11 foi visto que a função comprimento de arco de uma circunferência de raio r é $s(t) = rt$. Assim, $s = rt \Rightarrow t = \frac{s}{r}$. Como $0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq rt \leq 2\pi r \Rightarrow 0 \leq s \leq 2\pi r$. Portanto,

$$\vec{h}(t) = \left(rcos\left(\frac{s}{r}\right), rsen\left(\frac{s}{r}\right)\right),\ 0 \leq s \leq 2\pi r.$$

■

Exemplo 1.9.14 *Reparametrize pelo comprimento de arco a curva dada por* $\vec{r}(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t))$*, com* $t \geq 0$*.*

Solução: Temos que $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (e^t cos(t) - e^t sen(t), e^t sen(t) + e^t cos(t))$. Assim,

$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|\right| = \sqrt{(e^t cos(t) - e^t sen(t))^2 + (e^t sen(t) + e^t cos(t))^2} =$$

$$= \sqrt{e^{2t}cos^2(t) - 2e^{2t}sen(t)cos(t) + e^{2t}sen^2(t) + e^{2t}cos^2(t) + 2e^{2t}sen(t)cos(t) + e^{2t}sen^2(t)} =$$
$$= e^t\sqrt{2}.$$

Dessa forma, temos que

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}e^{t^*}dt^* = \sqrt{2}e^{t^*}\mid_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Então, $e^t = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow t = ln\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$. Além disso, como $t \geq 0 \Rightarrow e^t \geq 1 \Rightarrow s = e^t - 1 \geq 0$. Portanto,

$$\vec{h}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\left(cos\left(ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right), sen\left(ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)\right)\right), \ s \geq 0.$$

■

Exemplo 1.9.15 *Dada uma curva c, representada por $\vec{r}(t)$, mostre que se $||\vec{r}'(t)|| = 1$, então, o parâmetro t é também o parâmetro comprimento de arco s de c.*

Solução: Observe que

$$s(t) = \int_0^t ||\vec{r}'(t^*)||dt^* = \int_0^t dt^* = t.$$

Portanto, o parâmetro t é o parâmetro comprimento de arco s de c. ■

Exemplo 1.9.16 *Verifique que a curva $c : \vec{h}(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{5}}, \dfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)$, $s \geq 0$ está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Solução: Temos que a curva c, dada por $\vec{h}(s)$, está parametrizada pelo comprimento de arco se $||\vec{h}'(s)|| = 1$. Assim, como $\vec{h}'(s) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, segue que

$$||\vec{h}'(s)|| = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1.$$

Portanto, a curva c está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Uma curva pode não ser diferenciável em todos os pontos, ou seja, ela pode conter pontos agudos (bicos), como pode ser visto nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.9.17 *Considere a curva dada por $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$, com $-1 \leq t \leq 1$. Um esboço dessa curva é dado pela Figura 1.14.*

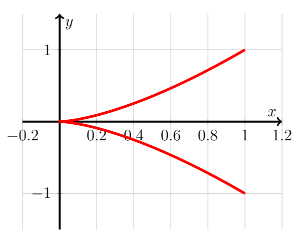

Figura 1.14: Esboço da curva $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$, com $-1 \leq t \leq 1$.

No ponto $P = (0, 0)$, que corresponde ao parâmetro $t = 0$, existe um bico. Além disso, temos que $\vec{r}'(t) = (2t, 3t^2)$ e, consequentemente, $\vec{r}'(0) = (0, 0)$.

■

Exemplo 1.9.18 *Considere a função vetorial dada por*

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (1, t), & 0 \leq t \leq 1 \\ (t, 1), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases},$$

com $0 \leq t \leq 2$. Um esboço da curva descrita por essa função é dada pela Figura 1.15.

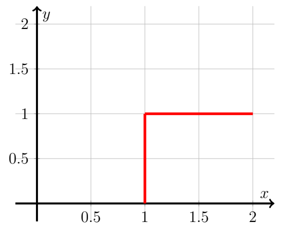

Figura 1.15: Esboço da curva do Exemplo 1.9.18.

No ponto $P = (1, 1)$, que correspondente ao valor de $t = 1$, temos um ponto anguloso. Observe também que para $t = 1$, o valor de $\vec{r}'(t)$ não existe.

■

Vamos agora construir a ideia para o que chamaremos de *Curvas Suaves*. Geometricamente, dizemos que uma curva é suave se ela é caracterizada pela ausência de bicos. Ou seja, em cada ponto da curva existe uma única reta tangente que varia continuamente quando nos movemos sobre a curva. Um esboço do gráfico de uma curva suave é dada pela Figura 1.16.

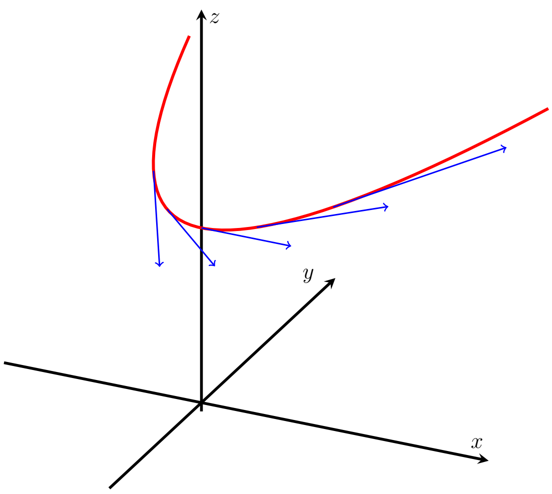

Figura 1.16: Representação do esboço do gráfico de uma curva suave.

Dessa forma, temos que uma curva será suave quando podemos parametrizar a curva por $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que $\vec{r}(t)$ exista e que $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$, como veremos na definição a seguir.

Definição 1.9.7 *Uma curva c é dita ser Suave (ou Regular) se a curva c admitir uma parametrização $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tenha derivada $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)$ contínua e $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.*

Algumas curvas não são suaves. Contudo, conseguimos dividir essa curva em um número finito de regiões de forma que cada uma dessas regiões são suaves. A próxima definição será sobre esse tipo de curva, chama de *Curva Suave por Partes*.

Definição 1.9.8 *Uma curva é dita ser* Suave por Partes *se ela puder ser dividida num número finito de curvas suaves.*

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.9.19 *a) A reta, a circunferência, a elipse, a senoide, a exponencial e a curva logarítmica são exemplos de curvas suaves.*

b) A hélice circular também é uma curva suave.

c) Na Figura 1.17 temos alguns esboços de curvas suaves por partes.

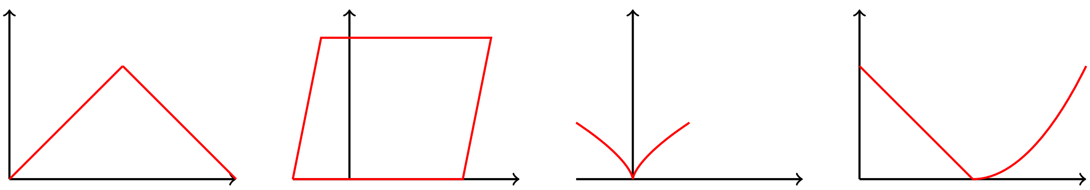

Figura 1.17: Esboço da curvas suaves por partes.

■

Observação 1.9.5 *Se uma curva c é suave por partes, então, o seu comprimento é dado por*

$$l = \int_a^{t_1} ||c'(t)||dt + \int_{t_1}^{t_2} ||c'(t)||dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{b} ||c'(t)||dt,$$

onde $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_{n-1}, b]$ são os subintervalos de $[a, b]$ nos quais a curva c é suave em cada um deles.

Exemplo 1.9.20 *Calcule o comprimento de arco da curva $c(t) = (t^2, |t|)$, com $-1 \leq t \leq 1$.*

Solução: Um esboço da curva é dado pela Figura 1.18.
Para esse caso é preciso dividirmos o intervalo em duas partes, sendo elas $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Assim, o comprimento da curva $L(c)$ fica dado por

$$L(c) = \int_{-1}^{1} ||c'(t)||dt = \int_{-1}^{0} ||c'(t)||dt + \int_{0}^{1} ||c'(t)||dt.$$

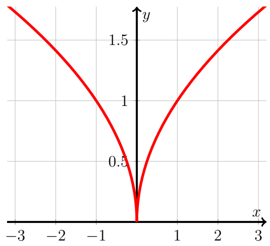

Figura 1.18: Esboço da curva $c : (t^2, |t|)$.

Como $c'(t) = (2t, -1)$ se $t \in [-1, 0]$ e $c'(t) = (2t, 1)$ se $t \in [0, 1]$, segue que em ambos os casos temos que $||c'(t)|| = \sqrt{4t^2 + 1}$. Dessa forma, temos que

$$L(c) = \int_{-1}^{1} ||c'(t)||dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{4t^2 + 1}dt = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}dt =$$

$$= 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left|1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\right|\right) - \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\ln\left|-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\right|\right) =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 + \sqrt{5}}{2}\right| + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{-2 + \sqrt{5}}{2}\right| = \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-2+\sqrt{5}}{2}}\right| =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 + \sqrt{5}}{-2 + \sqrt{5}}\right| = \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(2 + \sqrt{5})^2}{(-2 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}\right| =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(2 + \sqrt{5})^2}{-4 + 5}\right| = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left|2 + \sqrt{5}\right|.$$

■

Exemplo 1.9.21 *Seja c uma curva suave reparametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que, se c é representada por $\vec{h}(s)$, então, $||\vec{h}(s)|| = 1$.*

Solução: Como $\vec{h}(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que

$$\vec{h}(s) = \vec{r}(t(s)) \Rightarrow \vec{h}'(s) = \vec{r}'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Além disso, como t é a inversa de s e $\frac{ds}{dt} = ||\vec{r}'(t)||$ e, por isso, $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{||\vec{r}'(t)||}$. Assim,

$$\vec{h}'(s) = \vec{r}'(t(s)) \cdot \frac{1}{||\vec{r}'(t)||} \Rightarrow ||\vec{h}'(s)|| = ||\vec{r}'(t(s))|| \cdot \frac{1}{||\vec{r}'(t)||} = 1.$$

Portanto, se c é uma curva suave reparametrizada pelo comprimento de arco, então, $||\vec{h}(s)|| = 1$. ■

Agora vamos falar sobre a *Orientação* de curvas. Qual a importância disso? Imagine que um ponto material esteja se deslocando sobre uma curva suave c. Dessa forma, temos que existem dois possíveis sentidos de percurso e, por isso, devemos escolher um para ser o sentido positivo e, com isso, estaremos definido uma orientação para a curva c.

Definição 1.9.9 *Suponha que a curva suave c seja dada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. Chamamos de Sentido Positivo sobre c o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro t cresce de a até b. O sentido oposto é chamado de Sentido Negativo sobre c.*

Uma ilustração da Definição 1.9.9 é apresentada na Figura 1.19.

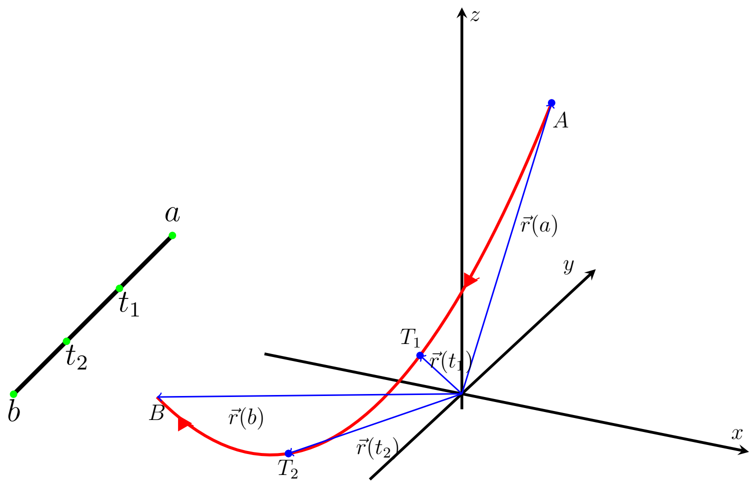

Figura 1.19: Ilustração da definição de orientação de curvas.

A partir de agora, nessas notas de aula, quando considerarmos uma curva suave c, ela vai ser representada por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in [a, b],$$

e, além disso, ela será uma curva orientada com sentido positivo de percurso sendo dado pelo sentido de valores crescente do parâmetro t.
Sobre as curvas suaves por partes, é possível orientar uma curva suave por partes, orientando cada parte suave da curva, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.9.22 *Aqui vamos apresentar uma maneira de fazer a orientação de curvas suaves por partes, como pode ser visto na Figura 1.20.*
Escolha a orientação de uma parte suave da curva. Assim, a orientação das demais segue o sentido da primeira parte.

■

Agora, vamos falar sobre como obter uma curva $-c$ com a orientação invertida em relação a uma curva c.

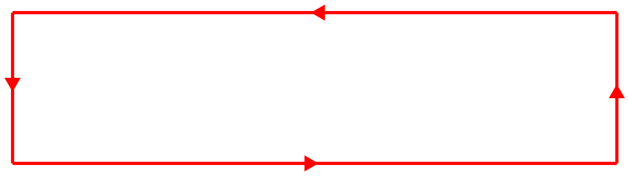

Figura 1.20: Ilustração de orientação de curvas suave por partes.

Definição 1.9.10 *Dada uma curva suave c, cuja parametrização é representada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $t \in [a, b]$, a curva $-c$ (Curva c orientada no sentido negativo) é definida por*

$$\vec{r}^{\,-}(t) = \vec{r}(a+b-t) = (x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t)), \; t \in [a, b].$$

É importante observar que a curva com orientação negativa não é a curva c multiplicada por -1. Por fim, falaremos do comprimento de arco de uma curva suave por partes.

Exemplo 1.9.23 *Dada a curva $c : \vec{r}(t) = (rcos(t), rsen(t), 2t)$, com $t \in [0, 2\pi]$, obtenha a curva $-c$.*

Solução: Temos que a curva $-c$ é dada por

$$-c : \vec{r}^{\,-}(t)\vec{r}(a+b-t) = (x(a+b-t), y(a+b-t), z(a+b-t))\,, \; t \in [0, 2\pi].$$

Assim, para esse exemplo temos que

$$-c : \vec{r}^{\,-}(t) = (rcos(2\pi - t), rsen(2\pi - t), 2(2\pi - t))\,, \; t \in [0, 2\pi].$$

Como

- $cos(2\pi - t) = cos(2\pi)cos(t) + sen(2\pi)sen(t) = cos(t)$ e
- $sen(2\pi - t) = sen(2\pi)cos(t) - cos(2\pi)sen(t) = -sen(t)$,

segue que

$$-c : \vec{r}^{\,-}(t) = (rcos(t), -rsen(t), 4\pi - 2t)\,.$$

■

Agora, vamos a alguns exercícios.

1.10 Exercícios

Exercício 1.10.1 *Determine o comprimento de arco de cada uma das curvas a seguir.*

a) $\vec{r}(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t), e^t)$, $0 \leq t \leq 1$;

b) $\vec{r}(t) = (2t^3, 2t, \sqrt{6}t^2)$, $0 \leq t \leq 3$;

c) $\vec{r}(t) = (t, sen(t), 1 + cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

d) $\vec{r}(t) = (2(t - sen(t)), 2(1 - cos(t)))$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

e) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $z = 0$ *de* $P = (0, 0, 0)$ *a* $Q = (4, 8, 0)$;

f) $x = t^3$, $y = t^2$, *para* $1 \leq t \leq 3$.

Exercício 1.10.2 *Escreva a função comprimento de arco de cada uma das funções vetoriais abaixo.*

a) $\vec{r}(t) = \left(sen\left(\frac{t}{2}\right), cos\left(\frac{t}{2}\right), 2t \right)$;

b) $\vec{r}(t) = (cos(2t), sen(2t), 4)$;

c) $\vec{r}(t) = (t, t^2)$;

d) $\vec{r}(t) = (cos^3(t), sen^3(t), \frac{3}{4}cos(2t))$.

Exercício 1.10.3 *Reparametrize pelo comprimento de arco as seguintes curvas:*

a) $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}cos(t), \sqrt{2}sen(t))$, $t \in [0, 2\pi]$;

b) $\vec{r}(t) = (3t - 1, t + 2)$;

c) $\vec{r}(t) = (cos(2t), sen(2t), 2t)$;

d) $\vec{r}(t) = (e^t cos(t), e^t sen(t), e^t)$;

e) $\vec{r}(t) = (cos(2t), sen(2t)), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

f) $x = 1 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3t$, $t \in [0, 1]$.

Exercício 1.10.4 *Verifique se as curvas dadas estão parametrizadas pelo comprimento de arco.*

a) $\vec{r}(t) = (sen(t), cos(t))$, $t \geq 0$;

b) $\vec{r}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}s} \right)$, $s \geq 0$;

c) $\vec{r}(t) = (2t - 1, t + 2, t)$, $t \geq 0$;

d) $\vec{q}(s) = (2cos(s), 2sen(s))$, $s \in [0, 2\pi]$.

Exercício 1.10.5 *Encontre a curva no sentido oposto de cada uma das curvas a seguir.*

a) $\vec{r}(t) = \left(sen\left(\frac{t}{2}\right), cos\left(\frac{t}{2}\right), 2t \right)$, $t \in [0, \pi]$;

b) $\vec{r}(t) = (cos(2t), sen(2t), 4)$, $t \in [0, 2\pi]$;

c) $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 4]$;

d) $\vec{r}(t) = (cos^3(t), sen^3(t), \frac{3}{4}cos(2t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.