Capítulo 5

Funções Afim

5.1 O Plano Numérico

Definição 5.1.1 *Um Par Ordenado $P = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado de Primeira Coordenada, e um objeto y, chamado de Segunda Coordenada.*

Observação 5.1.1 *É importante ressaltar que:*

1. $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u$ *e* $y = v$;

2. $\{x, y\} \neq (x, y)$, *pois em conjuntos a ordem dos elementos não importa, já no par ordenado importa.*

Definição 5.1.2 *O Produto Cartesiano do conjunto X pelo conjunto Y, denotado por $X \times Y$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja,*

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ e } x \in Y\}.$$

Teorema 5.1.1 *Se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, então, $X \times Y$ é finito e possui nm elementos.*

Demonstração: Liste dos os pares ordenados de $X \times Y$, assim:

$$y_1 : (x_1, y_1), (x_2, y_1), \cdots, (x_n, y_1) = n \text{ pares ordenados;}$$

$$y_2 : (x_1, y_2), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_2) = n \text{ pares ordenados;}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_m : (x_1, y_m), (x_2, y_m), \cdots, (x_n, y_m) = n \text{ pares ordenados;}$$

Assim, tem-se que $X \times Y$ é finito e que

$$n(X \times Y) = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m \text{ vezes}} = nm.$$

$\square$

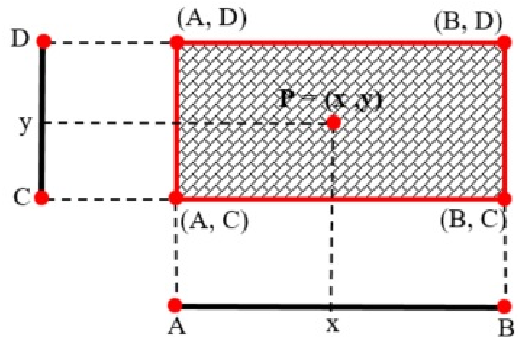

Figura 5.1: Representação do produto cartesiano entre o segmento AB e o segmento CD.

Exemplo 5.1.1 *Sejam AB e CD dois segmentos de reta. Então, $AB \times CD$ é um retângulo, como observado na Figura 5.1.*

$\square$

Exemplo 5.1.2 *Sejam γ uma circunferência e AB um segmento de reta. Então, $\gamma \times AB$ é um cilindro, como visto na Figura 5.2.*

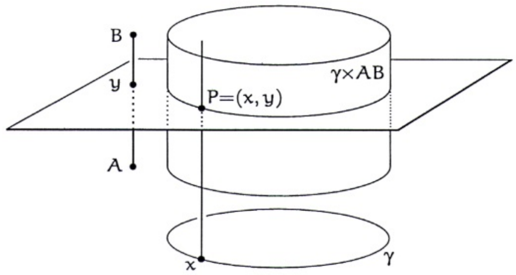

Figura 5.2: Representação do produto cartesiano entre o segmento AB e a circunferência γ.

$\square$

Definição 5.1.3 *O Gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o conjunto $Gr(f) \subset X \times Y$ tal que $y = f(x), \forall\ x \in X$, ou seja,*

$$Gr(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}.$$

Um subconjunto $G \subset X \times Y$ é o gráfico de uma função $f : X \to Y$ se, e somente se:

1. $\forall\ x \in X$, existe $(x, y) \in G$ tal que $y = f(x)$;

2. $(x, y) = (x', y')$, com $x = x'$, então, $y = y'$.

Definição 5.1.4 *Uma Relação (Binária) $\Re$ entre elementos do conjunto X e elementos do conjunto Y é um conjunto de condições que permitem determinar se dados $x \in X$ e $y \in Y$, então, x está (ou não) relacionado com y. Notação: $x \Re y$.*

Exemplo 5.1.3 *1. A relação de ordem "menor do que", $<$, de números reais: $x < y$;*

2. *Dados o conjunto R das retas do espaço e o conjunto P dos planos, o paralelismo entre uma reta $r \in R$ e um plano $\Pi \in P$ ($r \parallel \Pi$) é uma relação.*

3. *Uma função $f : X \to Y$ é uma relação onde xfY se $y = f(x)$.*

4. *O gráfico de uma relação $\Re$ entre os conjuntos X e Y ($Gr(\Re) = \{(x, y) \in X \times Y; x\Re y\}$) é uma relação onde $xGr(\Re)y$ se $(x, y) \in Gr(\Re)$.*

5.2 O Plano Numérico

Definição 5.2.1 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ *é chamado de Plano Numérico ou Plano Cartesiano.*

As coordenadas cartesianas de uma plano Π são obtidas fixando no plano dois eixos ortogonais OX e OY, que se intersectam em O, chamado de origem do sistema de coordenadas, como representado na Figura 5.3.

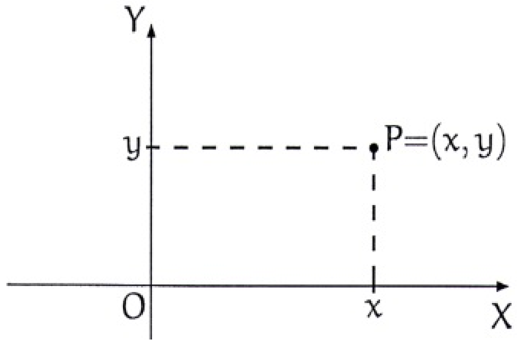

Figura 5.3: Representação do plano numérico.

Dado $P \in \Pi$, a abscissa de P é o número x coordenada da perpendicular que passa por P sobre OX e a ordenada de P é o número y coordenada da perpendicular que passa por P sobre OY. Nesse caso, (x, y) é o par de coordenadas de P.

Os eixos OX e OY dividem o plano em quatro regiões, chamadas de Quadrantes, como observada na Figura 5.4.
No primeiro quadrante tem-se que $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo quadrante tem-se que $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro quadrante tem-se $x \leq 0$ e $y \leq 0$; e por fim, no quarto quadrante tem-se $x \geq 0$ e $y \leq 0$. A função $f : \Pi \to \mathbb{R}^2$ é uma bijeção do plano com o $\mathbb{R}^2$. Por isso, se diz que o $\mathbb{R}^2$ é um modelo aritmético para o plano e que o plano é um modelo geométrico para $\mathbb{R}^2$.

Teorema 5.2.1 *Sejam $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ dois pontos do plano. Então, a Distância de P a Q, denotada por $d(P, Q)$, é dada por*

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

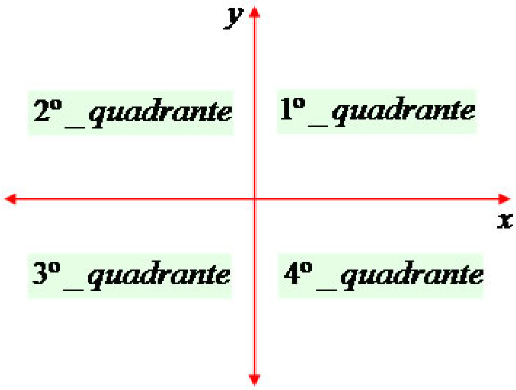

Figura 5.4: Representação dos quatro quadrantes do plano numérico.

Em particular, a distância de qualquer ponto a origem fica dada por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Demonstração: Considere a Figura 5.5.

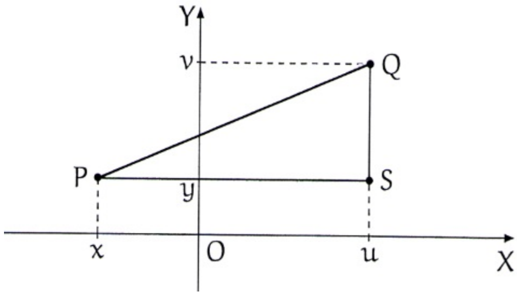

Figura 5.5: Distância entre dois pontos.

Seja S o ponto de encontro da reta paralela a OX passando por P e a paralela a OY passando por Q. Por essa construção, tem-se que $S = (u, y)$.

Como o triângulo $\triangle PQS$ é retângulo em S, segue do teorema de Pitágoras que

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, S))^2 + (d(S, Q))^2.$$

Como $d(P, S) = |x - u|$ e $d(S, Q) = |y - v|$, segue que

$$d(P, S) = \sqrt{|x - u|^2 + |y - v|^2}.$$

Tomando $Q = O = (0, 0)$, seque da última equação que

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\square$

Exemplo 5.2.1 *Se o centro de uma circunferência C e raio $r > 0$ é o ponto $A = (a, b)$, então,*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

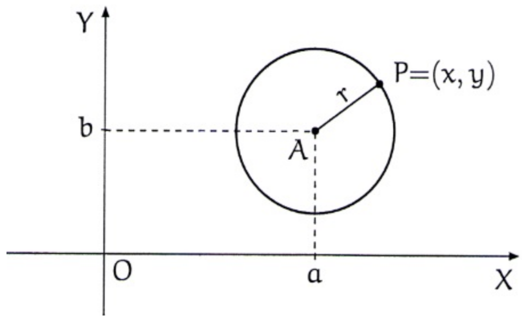

Figura 5.6: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$.

Uma representação da circunferência C pode ser observada na Figura 5.6. Portanto, uma equação da circunferência de raio $r > 0$ e centro (a, b), fica dada por

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

O disco (ou a Bola) de raio r e centro $A = (a, b)$ é dada por

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2.$$

□

Exemplo 5.2.2 *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Então, o gráfico de f é a semicircunferência de centro O e raio 1, situada no semiplano $y \geq 0$.*

Solução: De fato:

$$(x, y) \in Gr(f) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ e } y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow |x| \leq 1, y \geq 0 \text{ e } y^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\}.$$

Uma representação da semicircunferência C pode ser observada na Figura 5.7. □

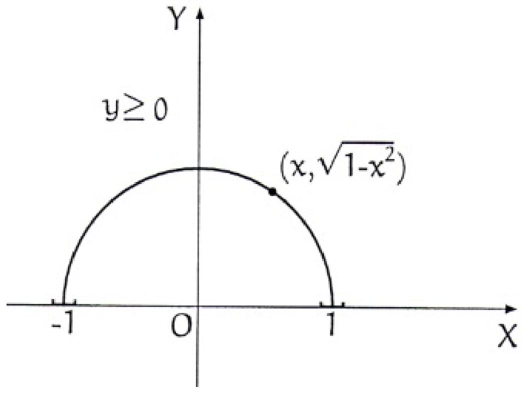

Figura 5.7: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\}$.

As condições 1 e 2 da definição de gráfico de função (Definição 5.1.3) podem assim ser interpretada geometricamente: Um conjunto $G \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se, e somente se, toda reta paralela ao eixo vertical passando por um ponto de x intersecta G num único ponto.

Exemplo 5.2.3 *Seja $c \neq 0$ e considere $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = c\}$. G é chamado de uma Hipérbole Equilátera. Na Figura 5.8, estão ilustradas os casos com $c > 0$ e $c < 0$. Para todo $x \neq 0$, a reta passando por x paralela ao eixo y, intersecta G num único ponto. Logo, G é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{c}{x}$.*

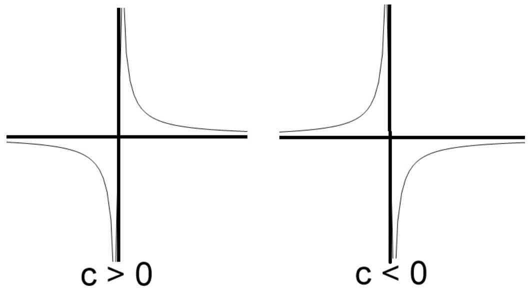

Figura 5.8: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = c$.

□

5.3 A Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.3.1 *São exemplo de funções afim:*

1. *Função Identidade:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x \end{array};$$

2. *Função Translação:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x + b \end{array};$$

3. *Função linear:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = ax \end{array};$$

4. *Função Constante:*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = b \end{array}.$$

□

Dada uma função afim $f(x) = ax + b$, então, tem-se que

$$b = f(0)$$

e, tomando $x_1 \neq x_2$, segue que

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2}.$$

Dado $x, x + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$, o número $a = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ é chamado de *Taxa de Crescimento* (ou *Taxa de Variação*) da função f em $[x, x + h]$.

Definição 5.3.1 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser Monótona se:*

1. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ *e, nesse caso, diz-se que f é estritamente crescente.*

2. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ *e, nesse caso, diz-se que f é estritamente decrescente.*

3. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ *e, nesse caso, diz-se que f é não-decrescente.*

4. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ *e, nesse caso, diz-se que f é não-crescente.*

Observe que uma função afim é crescente quando a sua taxa de variação é positiva, é decrescente quando a sua taxa de variação é negativa e constante quando a sua taxa de variação é nula.

Exemplo 5.3.2 *O preço a se pagar pela corrida de uma táxi é uma função afim.*

Solução: *De fato*: Seja x km a distância percorrida em cada corrida. Além disso, seja a o valor pago por quilômetros percorrido e seja b a “bandeirada” inicial. Dessa forma, segue que o valor a ser pago por cada corrida, denotado por $f(x)$, fica dado por

$$f(x) = ax + b.$$

$\square$

Teorema 5.3.1 *O gráfico de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta.*

Demonstração: Para provar isso, é necessário mostrar que quaisquer três pontos $P_1, P_2, P_3 \in Gr(f)$ estão alinhados, ou seja, basta mostrar que a distância entre os dois pontos mais distantes é igual a soma das distâncias entre o primeiro e o segundo pontos e entre o segundo ao terceiro pontos. Assim, considere três pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ do $Gr(f)$ tais que $x_1 < x_2 < x_3$. Dessa forma,

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + ((ax_3 + b) - (ax_1 + b))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2}\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} =$$
$$= (x_3 - x_2 + x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} =$$
$$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + ((ax_3 + b) - (ax_2 + b))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2} =$$
$$= d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

$\square$

Geometricamente, tem-se que b é o ponto onde a reta dada por $f : x \mapsto ax+b$ intersecta o eixo y e a é o coeficiente angular dessa reta em relação ao eixo x. Além disso, tem-se que uma função afim fica totalmente determinada conhecendo-se dois dos seus pontos, como demonstrado a seguir.

Teorema 5.3.2 *Dados dois pontos arbitrários $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, então existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.*

Demonstração: De fato: Seja $f(x) = ax + b$. Assim, $ax_1 + b = y_1$ e $ax_2 + b = y_2$. Daí, $a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$ e, consequentemente, a é definido de forma única por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Além disso, como

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 = \frac{y_1x_2 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_1}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1},$$

e, por isso, tem-se que b também fica definido de forma única, demonstrando o resultado. $\square$

Observação 5.3.1 *Tem-se que o gráfico $Gr(ax + b)$ de uma função afim é uma reta não inclinada.*

Teorema 5.3.3 *Toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.*

Demonstração: Considere dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ de r. Como r é uma reta não vertical, segue que $x_1 \neq x_2$. Logo, pelo teorema anterior, segue que existe uma única função afim $f : x \mapsto ax + b$ contendo os pontos P_1 e P_2. Logo, $Gr(f)$ coincide com r. $\square$

Observe que a taxa de variação $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pode ser vista como sendo o valor da tangente do ângulo entre a reta $f : x \mapsto ax + b$ e o eixo x. Além disso, conhecendo-se um ponto (x_0, y_0) da reta e a taxa de variação a, a reta $f : x \mapsto ax + b$ fica dada por

$$y = y_0 + a(x - x_0).$$

5.4 A Função Linear

A *Função Linear* é dada por uma função afim com o coeficiente linear b valendo zero, ou seja, a função dada pela fórmula $f(x) = ax$, que é o modelo matemático para a proporcionalidade.

Definição 5.4.1 *Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $c, x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(cx) = cf(x)$ (Proporcionalidade Direta) e $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$ (Proporcionalidade Indireta).*

Como $f(cx) = cf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então, tomando $a = f(1)$, tem-se que $f(c) = f(c.1) = cf(1) = ca$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Logo, $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é uma função linear. De maneira análoga, se $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ é tal que $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$, para todo $c, x \in \mathbb{R}^*$, tomando $a = f(1)$, segue que $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$ $f(x) = \dfrac{a}{c}$.

Exemplo 5.4.1

1. *Seja ABC um triângulo. A cada ponto $X \in AB$, associe um ponto $Y \in AC$ tal que $XY \parallel BC$. O Teorema de Tales garante que $XB = \alpha YB$.*

2. *Se $x \to x'$ e $y \to y'$ são proporcionalidades, então a igualdade $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x}$ permite que se determine um desses quatro números, quando se conhece os outros três, sendo essa a tradicional "Regra de Três".*

$\square$

Teorema 5.4.1 *(Teorema Fundamental da Proporcionalidade:) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Considerando $a = f(1)$, então, tem-se $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

3. *$f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo $x.y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Aqui será demonstrado de forma cíclica, ou seja, será mostrado que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Assim,

- (1) $\Rightarrow$ (2): Considere $k \in \mathbb{Q}$, então, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $k = \dfrac{m}{n}$. Logo,

$$nf(kx) = f(nkx) = f(mx) = mf(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(kx) = \frac{m}{n} f(x) = kf(x).$$

  Observe que $f(0) = f(0.0) = 0f(0) = 0$ e, como f é crescente, segue que $a = f(1) > f(0) = 0$ e, além disso, $f(k) = f(k.1) = kf(1) = ak$, para todo $k \in \mathbb{Q}$. Só falta mostrar que vale para qualquer número irracional também.

Suponha, por absurdo, que existe $x \in \mathbb{I}$ tal que $f(x) \neq ax$. Se $f(x) < ax$, segue que $\dfrac{f(x)}{a} < x$. Considere $k \in \mathbb{Q}$, tal que $\dfrac{f(x)}{a} < k < x$. Então, $f(x) < ak < ax$ e, consequentemente, $f(x) < f(k) < ax$, o que é um absurdo, pois $k < x$ e f é crescente, logo $f(k) < f(x)$. Se $f(x) > ax$, chega-se a uma contradição de forma análoga. Portanto, $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (2) $\Rightarrow$ (3): Tem-se que $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

- (3) $\Rightarrow$ (1): Observe que $f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$ e, por isso, a afirmação é verdadeira para $n = 2$. Suponha que a afirmação é verdadeira para n, ou seja, $f(nx) = nf(x)$. Assim, para o sucessor de n segue que:

  $$f((n+1)x = f(x+nx) = f(x)+f(nx) = f(x)+nf(x) = (n+1)f(x).$$

  Assim, como a propriedade é válida para 2 e, supondo que a propriedade é válida para n ela também é válida para $n+1$, segue do princípio da indução que $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que finaliza a demonstração do teorema.

$\square$

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade nos diz que para verificar se uma determinada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear basta verificar se ela é monótona e se $f(nx) = nf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.4.2 *Investindo x reais numa determinada caderneta de poupança, depois de um ano tem-se $f(x)$ reais. Quanto mais tempo aplicado, maior o valor de $f(x)$ e, por isso, f é crescente. Além disso, aplicar nx reais equivale a fazer n diferentes aplicações de x reais ao mesmo tempo e, por isso, $f(nx) = nf(x)$. Portanto, f é uma função linear.*

$\square$

Exemplo 5.4.3 *Dois retângulos de mesma altura tem suas áreas proporcionais a suas bases.*

Solução: *De fato*: Seja $f(x)$ a área do retângulo de base x e altura a. Tem-se que quanto maior a base do retângulo, maior a sua área e, portanto, segue que f é crescente. Um retângulo de base nx e altura a pode ser dividido em n triângulos de base x e altura a. Consequentemente, $f(nx) = nf(x)$.
Falta provar que $f(x) = ax$. Do Teorema Fundamental da Proporcionalidade tem-se que se $A = f(1)$, então, $f(x) = Ax$. Suponha que se tenha uma relação análoga para um retângulo de base fixa valendo 1 e altura variável. Nessas condições, $f(1) = aU$, onde U é a área do retângulo de base e altura valendo 1 e, por isso, $U = 1$ *u.a.*. Portanto, $A = a$. $\square$

Teorema 5.4.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depende apenas de h, então, f é uma função afim.*

Demonstração: Suponha que f seja uma função crescente. Então, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente visto que se $h > k$, então:

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x) > f(x+k) - f(x) = \varphi(k).$$

Além disso, para todo $h, k \in \mathbb{R}$ tem-se que:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) = f(x+h+k) - f(x+h) + f(x+h) - f(x) =$$

$$= f(u+k) - f(u) + f(x+h) - f(x) = \varphi(k) + \varphi(h).$$

Portanto, a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear e, considerando $a = \varphi(1)$, segue que $\varphi(h) = ah$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Assim, tomando $f(0) = b$, segue que

$$ah = \varphi(h) = f(x+h) - f(x) \Rightarrow f(h) = ah + b, \ \forall \ h \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $f(x) = ax + b$. □

Exemplo 5.4.4 *1. Suponha que uma partícula esteja se movimentando sobre um eixo. Sua posição em cada instante t é determinada pela sua coordenada $f(t)$. Diz-se que o movimento é uniforme quando a partícula se desloca sempre no mesmo sentido e, além disso, se em intervalos de tempos iguais a partícula percorre espaços iguais. Em outras palavras, $f(t+h) - f(t)$ depende apenas de h e, consequentemente, f é uma função afim.*

2. Geometricamente uma progressão aritmética - PA pode ser visto como sendo uma sequência de pontos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ igualmente espaçados sobre a reta, a partir de x_1. Dessa forma, a razão $h = x_{i+1} - x_i$ independe de i e, portanto, a PA é uma função afim.

Definição 5.4.2 *Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Poligonal quando existem $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ números reais tais que para $x \leq t_0$, $x \geq t_n$ e para cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, a função f coincide com uma função afim.*

Uma ilustração de uma função poligonal pode ser vista na Figura 5.9.

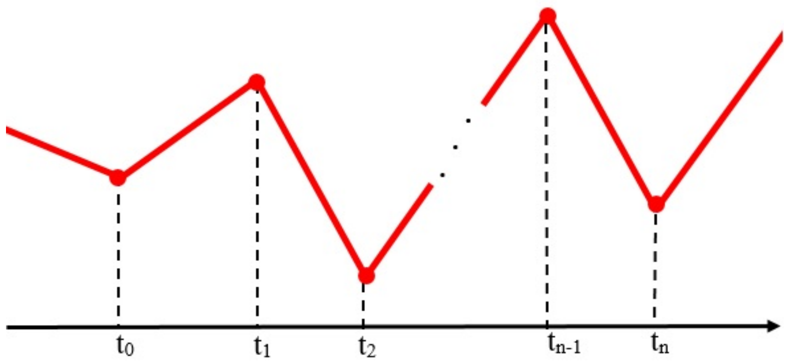

Figura 5.9: Ilustração de uma função poligonal.

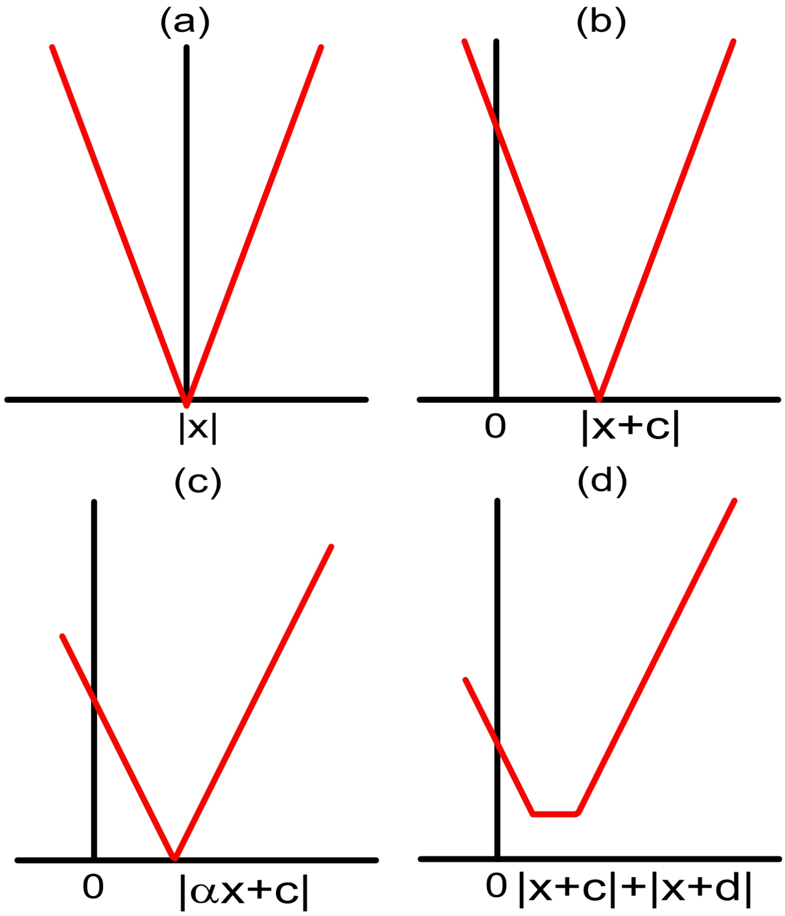

Figura 5.10: Exemplos de funções poligonais.

Exemplo 5.4.5 *Exemplos de funções poligonais podem ser visto na Figura 5.10.*
Em (a) tem-se a função dada por $f(x) = |x|$*; em (b) tem-se a função dada por* $f(x) = |x + c|$*; em (c) tem-se a função dada por* $f(x) = |\alpha x + c|$ *e em (d) tem-se a função dada por* $f(x) = |x + c| + |x + d|$*.*

Agora, faça alguns exercícios.