4.9 Superfícies Suaves e Orientação de Superfícies

Uma superfície suave é caracterizada pela ausência de arestas. Em outras palavras, em cada ponto P da superfície S existe um único plano tangente a S em P. Uma maneira conveniente de descrever a noção de suavidade de uma superfície S é dizer que se S puder ser dividida em partes e cada uma dessas partes admitir uma parametrização

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in \Re,$$

que tem cada uma das suas componentes admitindo derivadas parciais de todas as ordens contínuas e que $\forall (u_0, v_0) \in \Re$, as derivadas primeiras satisfazem a condição

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0) \neq \vec{0}, \tag{4.3}$$

ou seja, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ são vetores linearmente independentes, então, a superfície é suave.

Observação 4.9.1 *a) A condição dada pela Equação 4.3 é conhecida por Condição de Suavidade, ou de Regularidade.*

b) Os pontos de S onde falha a condição de suavidade, para qualquer parametrização de S, são chamados de Pontos Singulares.

c) Uma má escolha de parametrização pode levar a pontos onde a condição de suavidade falha, mesmo em superfícies suaves. Nesse caso, temos a existência de pontos Singulares Falsos.

Exemplo 4.9.1 *O ponto $P = (0,0,2)$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é um ponto singular falso para a parametrização*

$$\vec{r}(u,v) = (2cos(u)cos(v), 2sen(u)cos(v), 2sen(v)),\ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi,$$

visto que a esfera é uma superfície suave.

De fato: *Para o ponto P temos que $v = \frac{\pi}{2}$. Além disso, temos que*

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = (0,0,0)$$

e que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = (-2cos(u), -2sen(u), 0)$$

Logo,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = \vec{0}.$$

Porém, usando a parametrização $\vec{r}(u,v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2})$, temos que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(P) = (1,0,0)$ e que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(P) = (0,1,0)$, que são vetores LI. Portanto, P é um ponto singular falso. □

■

Definição 4.9.1 *Dizemos que uma superfície S é Suave por Partes se S puder ser dividida num número finito de superfícies suave.*

Exemplo 4.9.2 *a) Planos, paraboloides, cilindros e esferas são superfícies suaves;*

b) O cone não é uma superfície suave, visto que ele possui uma "ponta";

c) A superfície de um cubo é uma superfície suave por partes, pois ela pode ser dividida em 6 partes de planos;

d) Esboço de gráficos de superfícies suaves, dados pela Figura 4.18;

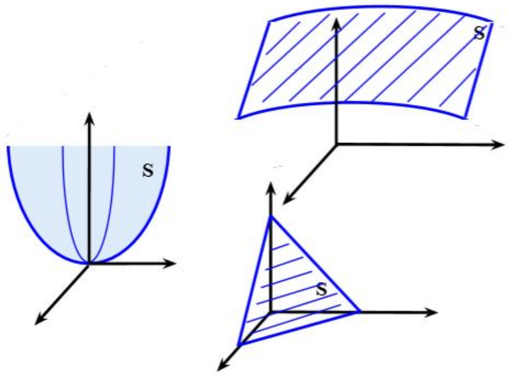

Figura 4.18: Esboço de gráficos de superfícies suaves.

e) Esboço de gráficos de superfícies suaves por partes, dados pela Figura 4.19.

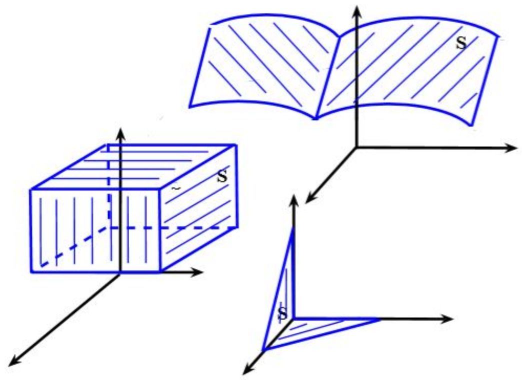

Figura 4.19: Esboço de gráficos de superfícies suaves por partes.

■

Definição 4.9.2 *Dada uma superfície suave S, em cada ponto $P \in S$, existe dois vetores unitários normais a S. Se for possível escolher um desses vetores de maneira contínua em toda a superfície, dizemos que S é Orientável.*

Definição 4.9.3 *Dizemos que uma superfície S está Orientada quando se escolhe em cada ponto $P \in S$ um vetor unitário $\vec{n}(P)$, normal a S, que varia continuamente com P. O campo de vetores $\vec{n}$ é chamado Campo Normal Unitário.*

Se a superfície S, suave, é representada por $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Re$, então,

$$\vec{n}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right|}$$

e $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ são vetores unitários normais a S.

Exemplo 4.9.3 *Determine um campo normal unitário a esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.*

Solução: S dada por

$$\vec{r}(u,v) = (acos(u)sen(v), asen(u)sen(v), acos(v)), \ 0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq v \leq \pi.$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-asen(u)sen(v), acos(u)sen(v), 0) \ \text{ e}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (acos(u)cos(v), asen(u)cos(v), -asen(v)).$$

Daí,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left|\left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -asen(u)sen(v) & acos(u)sen(v) & 0 \\ acos(u)cos(v) & asen(u)cos(v) & -asen(v) \end{array} \right|\right| =$$

$$= \left(-a^2cos(u)sen^2(v), -a^2sen(u)sen^2(v), -a^2sen(v)cos(v)\right).$$

Então, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}, u = \frac{3\pi}{2}, v = 0, v = \pi; \\ f_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0, u = \pi, u = 2\pi, v = 0, v = \pi; \\ f_3 = 0 \Leftrightarrow v = 0, v = \frac{\pi}{2}, v = \pi; \end{array} \right. ,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{0} \Leftrightarrow v = 0 \text{ ou } v = \pi.$$

Como

$$\left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right| = a^2sen(v),$$

segue que

$$\vec{n}_1 = (-cos(u)sen(v), -sen(u)sen(v), -cos(v)).$$

Além disso, $\lim\limits_{v\to 0} \vec{n}_1(u,v) = (0,0,-1)$ e $\lim\limits_{v\to\pi} \vec{n}_1(u,v) = (0,0,1)$. Portanto, o campo $\vec{n}_1$ fica definido por

$$\vec{n}_1 = \left\{ \begin{array}{rl} (-cos(u)sen(v), -sen(u)sen(v), -cos(v)), & v \neq 0 \text{ e } v \neq \pi \\ (0,0,-1), & v = 0 \\ (0,0,1), & v = \pi \end{array} \right.$$

■

Exemplo 4.9.4 *Determine um campo normal unitário do paraboloide S, dado por $\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$, onde $x^2 + y^2 \leq 4$.*

Solução: Temos que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 2x) \ \text{e} \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 2y)\,.$$

Com isso,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{array} \right\| = (-2x, -2y, 1) \neq \vec{0}, \forall (x,y).$$

Assim, como

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}(x,y) \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1},$$

segue que o campo $\vec{n}_1$ fica dado por

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right).$$

■

Exemplo 4.9.5 *A Faixa de Möbius, ilustrada na Figura 4.20, é um exemplo de uma superfície que não é orientável.*

Figura 4.20: Esboço da Faixa de Möbius.

Se uma superfície suave e orientada S é limitada por uma curva fechada simples c, podemos associar a orientação de S a um sentido positivo sobre c, como visto na Figura 4.21.

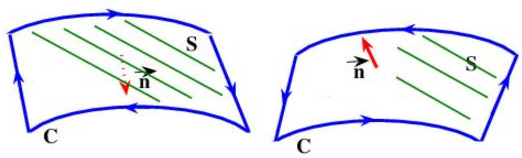

Figura 4.21: Orientação de curvas através da orientação da superfície suave.

Com essa convenção, podemos orientar um superfície suave por partes. Por exemplo, suponha que S seja formada por duas partes suaves orientáveis, S_1

e S_2, conforme a Figura 4.22. Se c é o contorno comum de S_1 e S_2, escolha um vetor normal unitário de S_1 e S_2 de tal maneira que se tenha o sentido positivo de c em relação a S_1 e que se tenha o sentido negativo de c em relação a S_2.

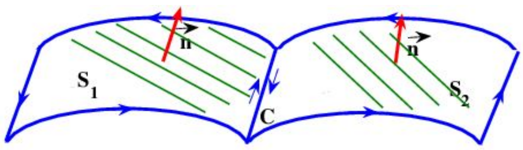

Figura 4.22: Orientação de curvas através da orientação da superfície.

Exemplo 4.9.6 *Uma possível orientação de um cubo é obtida quando se toma o vetor $\vec{n}$ apontando para fora da superfície. Com essa orientação, S é chamada de* ***Superfície Exterior*** *do cubo dado. Veja a Figura 4.23.*

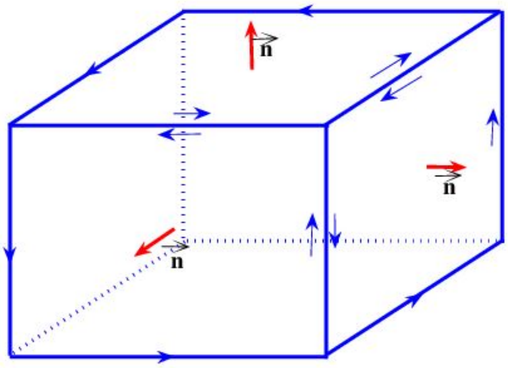

Figura 4.23: Ilustração da superfície exterior de um cubo dada pela orientação do mesmo.

Agora faça alguns exercícios. Bons estudos.

4.10 Exercícios

Exercício 4.10.1 *Determine um campo normal unitário do paraboloide*

$$\vec{r}(u,v) = (ucos(v), usen(v), u^2 - 1),$$

representando-o graficamente sobre a superfície.

Exercício 4.10.2 *Determine um campo normal unitário do plano que passa pelos pontos* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$, *usando as seguintes parametrizações:*

a) $\vec{r}(u,v) = (u+v, u-v, 1-2u)$;

b) $\vec{r}(u,v) = (u, v, 1-u-v)$.