1.5 A Derivada das Funções Vetoriais de uma Variável

Nessa seção vamos estender a ideia de derivadas de funções escalares para a *Derivada de Funções Vetoriais*. Quando estudamos derivada de funções escalares, tínhamos a definição que f' era dado por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

quando o referido limite existia. Das propriedades vista para limites de funções vetoriais, junto com o Exemplo 1.3.6, podemos concluir que, utilizando uma definição semelhante para as funções vetoriais, a derivada de uma função vetorial, que vai ser dada pela derivada de cada uma das funções coordenadas, como apresentado na definição a seguir.

Definição 1.5.1 *Seja $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial dada por $\vec{f} = \vec{f}(t)$. A Derivada de $\vec{f}$ em relação a t, denotada por $\dfrac{d\vec{f}}{dt}$ ou $\vec{f}'$, é definida por*

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

para todos os valores de $t \in I$ tais que o limite exista.

Observação 1.5.1 *Da definição de derivada de funções vetoriais de uma variável e demais propriedades temos que*

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \vec{a}(t) \Leftrightarrow f_i'(t) = a_i(t),\ \forall\ i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Em outras palavras, encontrar a derivada de uma função vetorial é obter a derivada de cada uma das funções coordenadas.

Exemplo 1.5.1 *Dada a função vetorial*

$$\vec{f}(t) = (3t^2 + 4t, \ln(2t^2 - 5), sen(3t^3 + 4t^2 - 1)),$$

obtenha o vetor $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t)$.

Solução: Temos que $f_1(t) = 3t^2 + 4t$, logo

$$f_1'(t) = (3t^2 + 4t)' = 6t + 4.$$

Além disso, temos que $f_2(t) = \ln(2t^2 - 5)$, logo

$$f_2'(t) = (\ln(2t^2 - 5))' = \frac{1}{2t^2 - 5} \cdot (2t^2 - 5)' = \frac{4t}{2t^2 - 5}.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = \text{sen}(3t^3 + 4t^2 - 1)$, logo

$$f_3'(t) = (\text{sen}(3t^3+4t^2-1))' = \cos(3t^3+4t^2-1)\cdot(3t^3+4t^2-1)' = (9t^2+8t)\cos(3t^3+4t^2-1).$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(6t+4, \frac{4t}{2t^2-5}, (9t^2+8t)\cos(3t^3+4t^2-1)\right).$$

■

O uso das propriedades para calcular limites e derivadas de funções são muito importantes, pois facilita na obtenção dos resultados. Sendo assim, apresentaremos algumas propriedades relacionadas a operações com funções vetoriais, que são obtidas diretamente das propriedades da derivada de funções escalares.

Observação 1.5.2 *Considere $\vec{f}, \vec{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções vetoriais e $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Então, são válidas as seguintes propriedades:*

a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{f} \pm \vec{g})(t) = \dfrac{d\vec{f}}{dt}(t) \pm \dfrac{d\vec{g}}{dt}(t)$;

b) $\dfrac{d}{dt}(h\vec{f})(t) = \left(h\dfrac{d\vec{f}}{dt}\right)(t) + \left(\dfrac{dh}{dt}\vec{f}\right)(t)$;

c) Se o produto vetorial estiver definido, então:

$$\frac{d}{dt}(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \left(\vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dt}\right)(t) + \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \times \vec{g}\right)(t);$$

d) $\dfrac{d}{dt}\left(||\vec{f}(t)||\right) = \dfrac{\left\langle \vec{f}(t), \dfrac{d\vec{f}}{dt}(t)\right\rangle}{||\vec{f}(t)||} = \dfrac{\vec{f}(t) \cdot \dfrac{d\vec{f}}{dt}(t)}{||\vec{f}(t)||}$.

Exemplo 1.5.2 *Encontre o vetor derivada de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

a) $\vec{f}(t) = \left(3t^2 - \dfrac{2t-4}{4t+3}, \sqrt[3]{2t^2-5t+4}, \ln(|3t^2-2t|)\right)$;

b) $\vec{f}(t) = sen(3t^2)\vec{i} - \dfrac{4}{5t+3}\vec{j} - e^{5t^2}\vec{k}$;

c) $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{t^2}, t^2-2t\right)$.

Solução:

a) Temos que $f_1(t) = 3t^2 - \dfrac{2t-4}{4t+3}$. Assim,

$$f_1'(t) = 6t - \frac{(2t-4)'(4t+3) - (2t-4)(4t+3)'}{(4t+3)^2} =$$

$$= 6t - \frac{8t+6-8t+16}{(4t+3)^2} = 6t - \frac{22}{(4t+3)^2}.$$

Para a segunda função coordenada, temos que $f_2(t) = \sqrt[3]{2t^2-5t+4}$. Dessa forma,

$$f_2'(t) = [(2t^2-5t+4)^{1/3}]' = \frac{1}{3}(2t^2-5t+4)^{-2/3}(2t^2-5t+4)' =$$

$$= \frac{4t-5}{3\sqrt[3]{(2t^2-5t+4)^2}}.$$

Para a terceira função coordenada temos $f_3(t) = \ln(|3t^2-2t|)$ e, assim,

$$f_3'(t) = \big(\ln(|3t^2-2t|)\big)' = \frac{1}{3t^2-2t}\cdot(3t^2-2t)' = \frac{6t-2}{3t^2-2t}.$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(6t - \frac{22}{(4t+3)^2}, \frac{4t-5}{3\sqrt[3]{(2t^2-5t+4)^2}}, \frac{6t-2}{3t^2-2t}\right).$$

b) Temos que $f_1(t) = \operatorname{sen}(3t^2)$. Logo,

$$f_1'(t) = \big(\operatorname{sen}(3t^2)\big)' = \cos(3t^2)\cdot(3t^2)' = 6t\cos(3t^2).$$

Além disso, temos que $f_2(t) = -\dfrac{4}{5t+3} = -4(5t+3)^{-1}$. Assim,

$$f_2'(t) = \big(-4(5t+3)^{-1}\big)' = -4(-1)(5t+3)^{-2}\cdot(5t+3)' = \frac{20}{(5t+3)^2}.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = -e^{5t^2}$. Dessa forma,

$$f_3'(t) = (-e^{5t^2})' = -e^{5t^2}\cdot(5t^2)' = -10te^{5t^2}.$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(6t\cos(3t^2), \frac{20}{(5t+3)^2}, -10te^{5t^2}\right).$$

c) Temos que $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \tfrac{1}{t^2}, t^2-2t\right)$. Dessa forma,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(\left(\frac{1}{t}\right)', \left(\frac{1}{t^2}\right)', (t^2-2t)'\right) = \big((t^{-1})', (t^{-2})', 2t-2\big) =$$

$$= \big(-1\cdot t^{-2}, -2\cdot t^{-3}, 2t-2\big) = \left(-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}, 2t-2\right).$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.5.3 *Considere a função vetorial $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivável, tal que $||\vec{f}|| = k$, onde k é uma constante positiva, para todo $t \in I$. Prove que $\vec{f}(t) \cdot \dfrac{d\vec{f}(t)}{dt} = 0$, para todo $t \in I$. Interprete geometricamente essa propriedade para o caso $n = 2$.*

Solução: Temos que $k = ||\vec{f}(t)|| = \sqrt{\left\langle \vec{f}(t), \vec{f}(t) \right\rangle}$, onde k é uma constante. Dessa forma, temos que $\left\langle \vec{f}(t), \vec{f}(t) \right\rangle = k^2$ e, por isso,

$$\frac{\left\langle \vec{f}(t), \vec{f}(t) \right\rangle}{dt} = \frac{d(k^2)}{dt} \Rightarrow \left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle + \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}(t), \vec{f}(t) \right\rangle = 0$$

e como o produto escalar é comutativo, segue que

$$2\left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle = 0, \forall\, t \in I.$$

Vamos a uma interpretação geométrica para o caso $n = 2$. Como $||\vec{f}(t)||$ é constante, e o gráfico de $\vec{f}$ é o lugar geométrico dos pontos extremos de $\vec{f}$ aplicados a $t \in I$, segue que o gráfico de $\vec{f}$ representa uma circunferência de raio $||\vec{f}(t)||$ (uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma mesma distancia de um determinado ponto).
Sendo assim, como $\left\langle \vec{f}(t), \dfrac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle = 0,\ \forall\, t \in A$, segue que $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t)$ são todos os vetores tangentes à circunferência. A Figura 1.4 traz uma representação gráfica da interpretação geométrica. ■

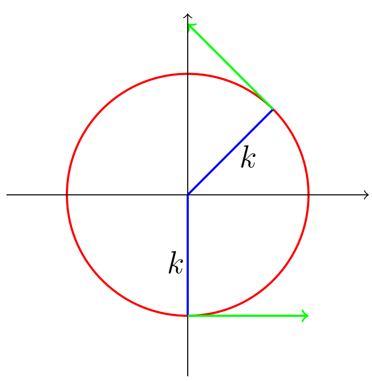

Figura 1.4: Interpretação gráfico do Exemplo 1.5.3 para o caso $n = 2$.

Exemplo 1.5.4 *Suponha que $||\vec{v}|| \neq 0$ para todo $t \in D_{\vec{v}}$. Considere também a função $\vec{T}(t) = \dfrac{v(\vec{t})}{||\vec{v}||}$ e que $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{v}(t)$. Prove que* *a)* $\vec{T}$ *e* $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ *são ortogonais;* *b)* $\vec{a} = ||\vec{v}||\dfrac{d\vec{T}}{dt} + \dfrac{d\,(||\vec{v}||)}{dt}\vec{T}$.

Solução:

a) Temos que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{||\vec{v}(t)||}\cdot\vec{v}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{||\vec{v}(t)||}\right)\cdot\vec{v}(t) + \frac{1}{||\vec{v}(t)||}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{||\vec{v}(t)||^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\right]\cdot\vec{v}(t) + \frac{1}{||\vec{v}(t)||}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\right).$$

Desta forma, temos que

$$\vec{T}(t)\cdot\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}(t)}{||\vec{v}(t)||}\cdot\left(-\frac{\frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\cdot\vec{v}(t)}{||\vec{v}(t)||^2} + \frac{1}{||\vec{v}(t)||}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{||\vec{v}(t)||}\left(-\frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\cdot\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)}{||\vec{v}(t)||^2} + \frac{\vec{v}(t)\cdot\frac{d}{dt}(\vec{v}(t))}{||\vec{v}(t)||}\right) =$$

$$= \frac{1}{||\vec{v}(t)||}\left(-\frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right) + \frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\right) = 0.$$

Portanto, os vetores $\vec{T}$ e $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais.

b) Temos que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\cdot\vec{v}(t)}{||\vec{v}(t)||^2} + \frac{1}{||\vec{v}(t)||}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\right),$$

e como $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{v}(t)$, segue que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\frac{\vec{v}(t)}{||\vec{v}(t)||^2} + \frac{\vec{a}(t)}{||\vec{v}(t)||}.$$

Assim, isolando $\vec{a}$, temos que

$$\frac{\vec{a}(t)}{||\vec{v}(t)||} = \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(||\vec{v}(t)||\right)\vec{T}\frac{1}{||\vec{v}(t)||},$$

e multiplicando $||\vec{v}(t)||$ dos dois lados da igualdade chegamos a

$$\vec{a} = ||\vec{v}||\frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d\,(||\vec{v}||)}{dt}\vec{T},$$

como desejado.

■

Visto que a derivada de uma função vetorial equivale a obter a derivada de cada uma das suas funções coordenadas e lembrando que a derivada de 2^a ordem da função escalar é obter a derivada da derivada de 1^a ordem da função, podemos estender a definição de *Derivadas de Ordem Superior* para funções vetoriais, como apresentado na observação a seguir.

Observação 1.5.3 *As derivadas de ordem superior são definidas de maneira análoga, ou seja,*

$$\frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2 f_1}{dt^2}, \cdots, \frac{d^2 f_n}{dt^2}\right),$$

$$\frac{d^3\vec{f}}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3 f_1}{dt^3}, \cdots, \frac{d^3 f_n}{dt^3}\right),$$

e assim por diante.

Exemplo 1.5.5 *Encontre as derivadas de segunda e a terceira ordem da função vetorial* $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{1+4t^2}, e^{-t}, \cos(2t-4)\right)$.

Solução: Vamos derivar cada uma das funções coordenadas. Temos que $f_1(t) = \frac{1}{1+4t^2} = (1+4t^2)^{-1}$. Desta forma,

$$\frac{df_1}{dt}(t) = \left[(1+4t^2)^{-1}\right]' = -1(1+4t^2)^{-2}(1+4t^2)' = -\frac{8t}{(1+4t^2)^2}.$$

Como a derivada segunda $\frac{d^2 f_1}{dt^2}$ é obtida derivando $\frac{df_1}{dt}$, temos que

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2}(t) = \left[-\frac{8t}{(1+4t^2)^2}\right]' = -\frac{(8t)'(1+4t^2)^2 - (8t)\left((1+4t^2)^2\right)'}{\left((1+4t^2)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1+4t^2)(8(1+4t^2) - 8t.2.8t)}{(1+4t^2)^4} = -\frac{8+32t^2-128t^2}{(1+4t^2)^3} = -\frac{8-96t^2}{(1+4t^2)^3}.$$

Da mesma forma, como a derivada terceira $\frac{d^3 f_1}{dt^3}$ é obtida derivando $\frac{d^2 f_1}{dt^2}$, segue que

$$\frac{d^3 f_1}{dt^3}(t) = \left(-\frac{8-96t^2}{(1+4t^2)^3}\right)' = -\frac{(8-96t^2)'((1+4t^2)^3) - (8-96t^2)((1+4t^2)^3)'}{\left((1+4t^2)^3\right)^2} =$$

$$= -\frac{-192t(1+4t^2)^3 - 16t(8-96t^2)(1+4t^2)^2}{\left((1+4t^2)^3\right)^2} = -\frac{-192t - 768t^3 - 128t + 1536t^3}{(1+4t^2)^4} =$$

$$= -\frac{768t^3 - 320t}{(1+4t^2)^4}.$$

Para $f_2(t) = e^{-t}$, temos que $f_2'(t) = -e^{-t}$, $f_2''(t) = e^{-t}$ e $f_2'''(t) = -e^{-t}$. Por fim, temos para $f_3(t) = \cos(2t-4)$ que $f_3'(t) = -2\text{sen}(2t-4)$, $f_3''(t) = -4\cos(2t-4)$ e $f_3(t) = 8\text{sen}(2t-4)$.
Portanto,

$$\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t) = \left(-\frac{8-96t^2}{(1+4t^2)^3}, e^{-t}, -4\cos(2t-4)\right)$$

e

$$\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}(t) = \left(-\frac{768t^3-320t}{(1+4t^2)^4}, -e^{-t}, 8\text{sen}(2t-4)\right).$$

■

Exemplo 1.5.6 *Dada a função vetorial*

$$\vec{f}(t) = (t\cos(t) - tsen(t), tsen(t) + t\cos(t)),$$

determine $\dfrac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t)$.

Solução: Temos que $(t\cos(t))' = \cos(t) - t\text{sen}(t)$ e que $(t\text{sen}(t))' = \text{sen}(t) + t\cos(t)$. Assim,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = ((t\cos(t))' - (t\text{sen}(t))', (t\text{sen}(t))' + (t\cos(t))') =$$

$$= (\cos(t) - t\text{sen}(t) - (\text{sen}(t) + t\cos(t)), \text{sen}(t) + t\cos(t) + \cos(t) - t\text{sen}(t))$$

e, consequentemente,

$$\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t) = (t(\text{sen}(t) - \cos(t)) - 2(\text{sen}(t) + \cos(t)), -t(\text{sen}(t) + \cos(t)) + 2(-\text{sen}(t) + \cos(t))).$$

■

Exemplo 1.5.7 *Suponha que um ponto se desloca no plano de modo que, para cada instante $t \geq 0$, a sua posição é dada por $\vec{g}(t) = (t^2, t^3)$. Dessa forma, o vetor velocidade da partícula fica dado por*

$$\frac{d\vec{g}}{dt}(t) = (2t, 3t^2), \quad com \ ||\vec{g}(t)|| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}.$$

Em particular, temos que $\vec{g}(0) = 0$. A trajetória da partícula é ilustrada na Figura 1.5.

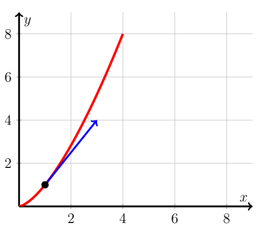

Figura 1.5: Ilustração da trajetória da partícula do Exemplo 1.5.7.

Na Figura 1.5 também é ilustrado o vetor tangente $\dfrac{d\vec{g}}{dt}(1) = (2,3)$*, no ponto* $(1,1)$.

■

Exemplo 1.5.8 *Considere a função vetorial $\vec{f}(t)$ dada no Exemplo 1.1.4, ou seja, a função vetorial $\vec{f}(t) = 2sen(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + t\vec{k}$, com $0 \leq t \leq 4\pi$. Assim, temos que o seu vetor velocidade fica dado por*

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = (2cos(t), -2sen(t), 1), \text{ em todo } t \in [0, 4\pi],$$

com

$$||\vec{f}'(t)|| = \sqrt{(2cos(t))^2 + (-2sen(t))^2 + (1)^2} = \sqrt{4(cos^2(t) + sen^2(t)) + 1} = \sqrt{5}.$$

■

Agora, faça alguns exercícios para treinar. Bons estudos.

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1 *Encontre a função $\frac{d\vec{f}}{dt}$, em cada item abaixo. Além disso, encontre a norma de cada uma das funções vetoriais e dos vetores tangentes.*

a) $\vec{f}(t) = (7t+3)\vec{i} + (8-5t)\vec{j} - 4\vec{k}$;

b) $\vec{f}(t) = \left(3t^2 + 4, 8 - t^3, \sqrt{t}\right)$;

c) $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t+1}, \sqrt{3t+3}, \frac{1}{t^2} - t\right)$;

d) $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{3t^2 - 2t + 1}{3 - 2t^2}\right)$.

e) $\vec{f}(t) = \left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^3 - 8}{t^3 + 8}, (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)\right)$;

f) $\vec{f}(t) = \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - 2t + 1}, \frac{2t+1}{t+5}, (3t-1)\right)$;

g) $\vec{f}(t) = \left(\frac{t^3 + 1}{t^2 + 3}, (t^2 - 2t^{-1} + 1), (t^2 + 3)(2t - 5)(3t + 2)\right)$;

h) $\vec{f}(t) = ((3t+2)^2(t^2-1), (3t^3 + t^{-3})(t+3)(t^2-5), (t^4 - 3t^2 + 4t - 1)^4)$;

i) $\vec{f}(t) = (3sen(t), tg(t) + cotg(t), 2t\cos(t))$;

j) $\vec{f}(t) = \left(\frac{2\cos(t)}{t-1}, tsen(t) + \cos(t), 4sen(t)\cos(t)\right)$

k) $\vec{f}(t) = (t^3 - t^2\cos(t) + 2tsen(t) + 2\cos(t), 3sec(t)tg(t))$;

l) $\vec{f}(t) = \left((3t^2+5)^3(3t-1)^2, (2t-5)^{-1}(4t+3)^{-2}, (t+3)^3(5t+1)^2(3t^2-4)\right)$;

m) $\vec{f}(t) = \left(\frac{t-7}{t+2}, \left(\frac{2t-1}{3t^2+t-2}\right)^3, \frac{(t^2-5)^3}{(t^2+5)^2}\right)$.

n) $\vec{f}(t) = \left(4t^{\frac{1}{2}} + 5t^{\frac{-1}{2}}, 3t^{\frac{2}{3}} - 6t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{-1}{3}}, \sqrt{1+4t^2}\right)$;

o) $\vec{f}(t) = \left((5-3t)^{\frac{2}{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{25-t^2}}, 2\cos(\sqrt{t})\right)$;

p) $\vec{g}(t) = \left(cotg(\sqrt{3x}), tg(\sqrt{t^2+1}), \sqrt{\dfrac{2t-5}{3t+1}}\right)$;

q) $\vec{f}(r) = \left(\sqrt[3]{2r^3 - 5r^2 + r}, \sqrt{2r} + \sqrt{\dfrac{2}{r}}\right)$.

Exercício 1.6.2 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

a) $\vec{f}(t) = (\ln(|t^3+1|), \ln(|\cos(3t)|), \ln(|tg(4t) + \sec(4t)|))$;

b) $\vec{f}(t) = \left(\ln\left(\left|\dfrac{3t}{t^2+4}\right|\right), \ln(|t^2(t^2-1)^3(t+2)^4|), \frac{t}{\ln(t)}\right)$.

c) $\vec{f}(t) = \left(e^{5t}, e^{t^2-3}, e^x sen(e^t), e^{e^t}\right)$;

d) $\vec{f}(t) = \left(t^5 e^{-3\ln(t)}, \dfrac{2}{e^t + e^t}, \ln\left(\dfrac{e^{4t}-1}{e^{4t}+1}\right)\right)$.

Exercício 1.6.3 *Encontre as derivadas de 1^a, 2^a e 3^a ordem das funções vetoriais a seguir.*

a) $\vec{f}(t) = (t^5 - 2t^3 + t)\vec{i} + t^{\frac{1}{3}}\vec{j} + (2t^4 - 4t^3 + 7t - 1)\vec{k}$;

b) $\vec{f}(t) = \left(t^2\sqrt{t} - 5t, \sqrt{t^2+1}, 4\cos(t^2)\right)$;

c) $\vec{f}(t) = \left(cotg^2(t), \dfrac{t^2}{t^2+4}, \sqrt{sen(t)+1}\right)$;

d) $\vec{f}(t) = \left(t^4 - 2t^2 + t - 5, \dfrac{3}{2x-1}, 2tg(3t), \cos(2t) - sen(2t)\right)$.

Exercício 1.6.4 *Seja $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função vetorial dada por $\vec{f}(t) = (e^t, t)$. Trace a curva descrita por $\vec{f}$ junto com os vetores tangentes $\vec{f}'(0)$ e $\vec{f}'(1)$.*

Exercício 1.6.5 *Seja $\vec{f}: [0,1] \to \mathbb{R}^3$ a função vetorial dada por $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$.*

a) Trace a curva descrita por $\vec{f}$ no $\mathbb{R}^3$ e trace a reta tangente em $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$.

b) Determine a norma do vetor tangente.

c) Determine todos os pontos da curva descrita por $\vec{f}$ nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor $(4,4,3)$.

d) Existe algum ponto no qual a tangente é perpendicular a $(4,4,3)$? Por que?