8.4 Funções deriváveis num intervalo

Agora veremos alguns resultados relacionados a derivação com funções cujo domínio são intervalos. Comecemos com o *Teorema de Darboux*.

Teorema 8.4.1 *(**Teorema de Darboux**:) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(a)<d<f'(b)$, então, existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=d$.*

Demonstração: Suponha inicialmente que $d=0$. Como f é derivável em $[a,b]$, segue que f é contínua em $[a,b]$. Daí, segue do Teorema de Weierstrass (Teorema 7.3.2) que f assume valor mínimo em algum ponto c no compacto $[a,b]$.

Como $f'(a)<0$, segue do Teorema 8.3.1 que existem pontos $x\in(a,b)$ tais que $f(x)<f(a)$ e, por isso, esse mínimo não é atingido em a, ou seja, $a<c$. Com uma argumentação análoga, concluímos que $c<b$. Dessa forma, do Corolário 8.3.7 temos que $f'(c)=0$. Para o caso geral, considere a função auxiliar $g(x)=f(x)-dx$. Assim, temos que $g'(x)=f'(x)-d$ e, por isso,

$$g'(c)=0\Leftrightarrow f'(c)=d \text{ e } g'(a)<0<g'(b)\Leftrightarrow f'(a)<d<f'(b).$$

■

Observação 8.4.1 *Observe que o Teorema de Darboux não exige que a função f seja de classe C^1 mas, sendo ela uma função derivável, então, temos que f goza da propriedade do valor intermediário.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 8.4.1 *a) Seja $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ a função definida por*

$$g(x)=\begin{cases} -1, & se \quad -1\le x<0 \\ 1, & se \quad 0\le x\le 1 \end{cases}.$$

Temos que g não goza da propriedade do valor intermediário, visto que g só assume os valores de -1 e 1 no intervalo $[-1,1]$. Dessa forma, não pode existir uma função $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ derivável, tal que $f'=g$.

b) A função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$h(x)=\begin{cases} 2x\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & se \quad x\neq 0 \\ 0, & se \quad x=0 \end{cases},$$

é descontínua na origem, mas mesmo assim existe uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right), & se \quad x\neq 0 \\ 0, & se \quad x=0 \end{cases},$$

tal que $f'=h$.

■

Os próximos resultados também são muito conhecidos. O primeiro é chamado de *Teorema de Rolle* e o segundo é o *Teorema do Valor Médio de Lagrange*.

Teorema 8.4.2 *(**Teorema de Rolle:**) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a)=f(b)$. Se f é derivável em (a,b), então, existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*

Demonstração: Como f é contínua e está definida num conjunto compacto, segue do Teorema de Weierstrass (Teorema 7.3.2) que f assume valores máximo M e mínimo m em $[a,b]$. Se $m=M$, então, f é uma função constante e, dessa forma, $f'(c)=0$, para todo $c\in(a,b)$. Caso contrário, temos do Corolário 8.3.7 que $\exists$ $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.
De fato: Se $f(a)=m$, então, existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=M$, então, como M é extremo, segue que $f'(c)=0$. □ ■

Teorema 8.4.3 *(**Teorema do Valor Médio de Lagrange:**) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a,b), então, existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração: Considere a função auxiliar $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=f(x)-dx$, onde $d=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Afirmação: temos que $g(a)=g(b)$.

De fato: Temos que

$$g(a)=f(a)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)a=\frac{f(a)(b-a)-f(b)a+f(a)a}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

e

$$g(b)=f(b)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)b=\frac{f(b)(b-a)-f(b)b+f(a)b}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

□

Assim, como $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, com $g(a)=g(b)$, segue do Teorema de Rolle (Teorema 8.4.2) que existe $c\in(a,b)$ tal que $g'(c)=0$, ou seja,

$$f'(c)=d=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Observação 8.4.2 *Existe outro enunciado equivalente para o Teorema do Valor Médio de Lagrange, que poderá ser usado, caso necessário:*

"Seja $f:[a,a+h]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $(a,a+h)$. Então, existe um número $\theta\in(0,1)$ tal que $f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$.

■

Vejamos outras consequências interessantes dos teoremas anteriores.

Corolário 8.4.1 *Se a função $f: I \to \mathbb{R}$ é contínua num intervalo I, com $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathring{I}$, então, f é uma função constante.*

Demonstração: Para quaisquer $x, y \in I$, temos que existe $c \in (x, y)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ e, por isso,

$$f(x) = f(y) + f'(c)(x - y) = 0(x - y) \Rightarrow f(x) = f(y), \forall\ x, y \in I.$$

■

Corolário 8.4.2 *Sejam função $f, g: I \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $\mathring{I}$, com $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in \mathring{I}$, então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$, para todo $x \in I$.*

Demonstração: Seja a função $h: I \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(x) - f(x)$. Daí, temos que $h'(x) = 0$, para todo $x \in \mathring{I}$. Assim, segue do Corolário 8.4.1 que $h(x) = c$, ou seja, $g(x) = f(x) + c$, para todo $x \in I$. ■

Corolário 8.4.3 *Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$, para todo $x \in I$, então, para todo $x, y \in I$ temos que*

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Demonstração: Para cada $x, y \in I$, temos que $f: [x, y] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y). Assim, segue do Teorema do Valor Médio de Lagrange que existe $c \in (x, y)$ tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Dessa forma, temos que

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq k|y - x|.$$

■

Observação 8.4.3 *O Corolário 8.4.3 nos afirma que de uma função f possui derivada limitada num intervalo I, então, f é uma função lipschitziana nesse intervalo e, consequentemente, f é uniformemente contínua em I.*

■

Já vimos que se uma função f é monótona não-decrescente, então, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Será que a recíproca é verdadeira? A resposta é sim, e será provado a seguir.

Corolário 8.4.4 *A fim de que uma função derivável $f: I \to \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: Do Corolário 8.3.1 temos que se f é monótona não decrescente, então, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Reciprocamente, Suponha que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Daí, cada $x, y \in I$, existe z entre x e y tais que $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$. Como $f'(z) \geq 0$, segue que se $x < y$, então, $f(y) \leq f(x)$. ■

Corolário 8.4.5 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então, f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1} : J \to I$ é derivável, com $g'(x) \cdot f'(x) = 1$, para todo $y = f(x) \in J$.*

Demonstração: Sendo $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, temos que f é crescente, pois caso contrário existe $x < y \in I$ tais que $f(y) \leq f(x)$ e, consequentemente, $f'(z) \leq 0$. Do Corolário 8.2.1, tendo que $f'(x) > 0$, segue que $g = f^{-1} : J \to I$ é derivável, com $g'(x) \cdot f'(x) = 1$, para todo $y = f(x) \in J$. ■

Exemplo 8.4.2 *a) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Então, segue do Corolário 8.4.3 que se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, segue que a restrição $f|_P$ é uma função lipschitziana, visto que p' sendo contínua, é uma função limitada no compacto $\overline{X}$ e, consequentemente, é uniformemente contínua.*

b) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tem derivada limitada, então, segue que f é contínua e, consequentemente, os limites laterais $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b_-} f(x)$ existem. Dessa forma, temos que a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, não pode ter a derivada limitada, visto que $\lim\limits_{x \to 0_+}$ não existe.

■

OS resultados dessa seção são os necessários para construir o conhecido "*Teste da Primeira Derivada*", que foi utilizado nos estudos do curso de Cálculo. O nosso objetivo não é ficar fazendo esse tipo de exercícios, aqui apenas verificamos que as ferramentas para construir o teste são válidas. Agora, faça os exercícios para fixar o conteúdo estudado. Bons estudos.