3.3 A Regra de Cramer

Vamos iniciar essa seção enunciando o Teorema de Cramer para resolução de sistemas lineares. Esse método é muito utilizado na resolução de sistemas lineares com pouco número de variáveis, mas pode ficar difícil o seu uso para sistemas lineares com um grande número de variáveis por causa do cálculo dos determinantes. Vamos ao teorema.

Teorema 3.3.1 *(**Regra de Cramer**:) Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $n \times n$. Assim, se $D = \det(A) \neq 0$, então, temos que s é possível e determinado e, além disso,*

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \ \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

onde D_i é o determinante da matriz que obtermos de A, substituindo a coluna A_i pela matriz b dos termos independentes.

Demonstração: Seja $s : Ax = b$ um sistema linear $n \times n$ tal que $D = \det(A) \neq 0$. Como A é invertível, então, temos que uma solução de s é dada por $x = A^{-1}b$, onde A^{-1} é a inversa de A. Dessa forma, temos que s possui solução. Agora precisamos mostrar que ela é única. Para isso, suponha que exista $\bar{x}$ tal que $A\bar{x} = b$. Dessa forma, temos que

$$\bar{x} = Id\,\bar{x} = A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}b = x.$$

Portanto, s é possível e determinado.

Como $x = A^{-1}b$ e $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\overline{C}$, onde $\overline{C}$ é a matriz adjunta de A, então, temos que

$$x = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

como o elemento x_i é obtido multiplicando a linha i pelo vetor b, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então, temos que

$$x_i = \frac{1}{D}(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni}) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i}{D}.$$

Portanto, vale a Regra de Cramer. ■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3.1 *Use o método de Cramer para obter a solução do sistema linear*

$$s : \begin{cases} -x & - & 4y = & 0 \\ 3x & + & 2y = & 5 \end{cases}.$$

Solução: Temos que a matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10 \neq 0$$

e, por isso, s é um sistema linear possível e determinado. Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 20 = 20 \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 0 = -5,$$

segue que a solução do sistema linear s fica dada por

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{20}{10} = 2 \text{ e } y = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}.$$

■

Exemplo 3.3.2 *Use o método de Cramer para obter a solução do sistema linear*

$$s : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array} \right. .$$

Solução: Temos que a matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-1.1 & -1-1.1 \\ -1-1.2 & 1-1.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

e, por isso, s é um sistema linear possível e determinado. Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 1 + 4 + 1 + 4 - 6 = -4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 12 + 1 + 8 - 6 + 1 = -12 \text{ e}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 - 6 + 12 - 1 - 4 = -8,$$

segue que a solução do sistema linear s fica dada por

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-4} = 1, \; y = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{-4} = 3 \text{ e } z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

■

Exemplo 3.3.3 *Use o método de Cramer para obter a solução do sistema linear*

$$s : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & & & + & 3z & = & -1 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 7 \end{array} \right. .$$

Solução: Temos que a matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0+2-12-0-4-9 = -23 \neq 0$$

e, por isso, s é um sistema linear possível e determinado. Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0-1-21+0+2-3 = -23,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 6+14+12+4-63+4 = -23 \text{ e}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0+4+2-0+14+3 = 23,$$

segue que a solução do sistema linear s fica dada por

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-23}{-23} = 1, \ y = \frac{D_2}{D} = \frac{-23}{-23} = 1 \text{ e } z = \frac{D_3}{D} = \frac{23}{-23} = -1.$$

■

Exemplo 3.3.4 *Use o método de Cramer para obter a solução do sistema linear*

$$s : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & & & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & + & t & = & -1 \end{array} \right. .$$

Solução: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz principal do sistema linear s.

Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-1.2 & 1-1.2 & 0-1.2 \\ 1-1.(-1) & -1-1.(-1) & -1-1.(-1) \\ 0-1.2 & 2-1.2 & 1-1.2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-2-0 = -2 \neq 0$$

e, por isso, s é um sistema linear possível e determinado. Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-1.2 & 1-1.2 & 0-1.2 \\ 1-1.0 & -1-1.0 & -1-1.0 \\ 0-1.(-1) & 2-1.(-1) & 1-1.(-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6-6+1-2+2-9 = -8,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-1.2 & 1-1.2 & 0-1.2 \\ 0-1.(-1) & -1-1.(-1) & -1-1.(-1) \\ -1-1.2 & 2-1.2 & 1-1.2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-1-0 = -1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-1.2 & 2-1.2 & 0-1.2 \\ 1-1.(-1) & 0-1.(-1) & -1-1.(-1) \\ 0-1.2 & -1-1.2 & 1-1.2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3+12+0-4+0+0 = 11 \text{ e}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-1.2 & 1-1.2 & 2-1.2 \\ 1-1.(-1) & -1-1.(-1) & 0-1.(-1) \\ 0-1.2 & 2-1.2 & -1-1.2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0+0+2-0-0-6 = -4,$$

segue que a solução do sistema linear s fica dada por

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-8}{-2} = 4,\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2},\ z = \frac{D_3}{D} = \frac{11}{-2} = -\frac{11}{2} \text{ e } t = \frac{D_4}{D} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

■

Exemplo 3.3.5 *Use o método de Cramer para obter a solução do sistema linear*

$$s : \begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ \dfrac{2x-2}{3z+2} = & 1 & = \dfrac{z+1}{2z+y} \end{cases} .$$

Solução: Observe que s não está apresentado como um sistema linear, contudo podemos reorganizar as equações para chegar no sistema linear propriamente dito. Observe que $\frac{2x-2}{3z+2} = 1 = \frac{z+1}{2z+y}$ corresponde a duas igualdades: $\frac{2x-2}{3z+2} = 1$ e $\frac{z+1}{2z+y} = 1$. Para a primeira, que só faz sentido para $3z+2 \neq 0$, multiplicando os dois lados da igualdade por $3z+2$ chegamos a:

$$\frac{2x-2}{3z+2} = 1 \text{ e } 3z+2 \neq 0 \Rightarrow 2x-2 = 3z+2 \text{ e } z \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow 2x-3z = 4 \text{ e } z \neq -\frac{2}{3}.$$

Por outro lado, a segunda igualdade só faz sentido se $2z+y \neq 0$ e, multiplicando cada os dois lados da equação por $2z+y$ chegamos a:

$$\frac{z+1}{2z+y} = 1 \text{ e } 2z+y \neq 0 \Rightarrow z+1 = 2z+y \text{ e } y \neq -2z \Rightarrow y+z = 1 \text{ e } y \neq 2z.$$

Portanto, o sistema linear s pode ser reescrito por:

$$s: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3z = 4 \\ y + z = 1 \\ z \neq -\frac{2}{3} \\ y \neq -2z \end{cases}.$$

Dessa forma, o determinante da matriz principal fica dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+2+0-0-2+3 = 3 \neq 0$$

e, por isso, s é um sistema linear possível e determinado. Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (duas linhas iguais)},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4-0+2-0+3-2 = 7 \text{ e}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+2+0-0-4-2 = -4,$$

e como $z = \frac{D_3}{D} = -\frac{4}{3} \neq -\frac{2}{3}$ e $y = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{3} \neq \frac{8}{3} = -2z$, segue que s possui solução única dada por:

$$x = \frac{D_1}{D} = 0, \; y = \frac{7}{3} \text{ e } -\frac{4}{3}.$$

■

Até agora usamos a Regra de Cramer para sistemas quando o determinante da matriz principal é não nulo. Na observação a seguir iremos apresentar as discussões quando o determinante da matriz principal assume valor zero.

Observação 3.3.1 *A Regra de Cramer nos diz que se $s : Ax = b$ é um sistema linear de ordem n e* $\det(A) \neq 0$ *é condição necessária e suficiente para que s seja um sistema linear possível e determinado. Uma consequência disso é que s é impossível se, e somente se,* $\det(A) = 0$ *e* $\rho\left([A \vdots b]\right) \neq \rho(A)$. *Essa última condição é equivalente a dizer que o valor do determinante principal $D = \det(A) = 0$, mas para pelo menos um dos determinantes secundários vale a condição $D_i \neq 0$. Portanto, temos as seguintes situações:*

- $\det(A) \neq 0$*: sistema linear possível e determinado;*
- $\det(A) = 0$ *e* $D_i = 0$*, para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*: sistema linear possível e indeterminado;*
- $\det(A) = 0$ *e* $D_i \neq 0$*, para algum* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*: sistema linear impossível.*

■

Vejamos agora os exemplos.

Exemplo 3.3.6 *Discuta cada um dos sistemas lineares a seguir.*

a) $s : \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases};$

b) $s : \begin{cases} x + y = 4 \\ 0x - 0y = 0 \end{cases};$

c) $s : \begin{cases} x + y = 9 \\ x + y = 7 \end{cases};$

d) $s : \begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ 15x - 2y = 24 \end{cases};$

e) $s : \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 5 \\ 4x - 2y + 6z = -8 \end{cases};$

f) $s : \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = -3 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases};$

g) $s : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}.$

Solução:

a) A matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

e, por isso, s é um sistema linear possível e determinado. Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2,$$

segue que a solução do sistema linear s fica dada por

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-8}{-2} = 4 \text{ e } y = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

b) A matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ Como } D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

segue que s é um sistema linear possível e indeterminado. A solução de s pode ser representada por

$$x = 5 - y \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

c) A matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Como } D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 7 = 2 \neq 0,$$

segue que s é um sistema linear impossível. Portanto, s não tem solução.

d) A matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Linha 3 é o dobro da linha 1).}$$

Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Linha 3 é o dobro da linha 1),}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Linha 3 é o dobro da linha 1) e}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (Linha 3 é o dobro da linha 1),}$$

segue que s é um sistema linear possível e indeterminado. Escalonando o sistema linear s chegamos a: $s : \begin{cases} x \quad + z = -3/5 \\ \quad y - z = 14/5 \end{cases}$ e, por isso, a solução de s pode ser representada por

$$x = -\frac{3}{5} - z,\ y = \frac{14}{5} + z \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

e) A matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0\ (L_2 = 2L_3 - 3L_1).$$

Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \left(L_3 = \frac{L_2 + 3L_1}{2} \right), \ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \left(L_3 = \frac{L_2 + 3L_1}{2} \right) v \text{ e}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \left(L_3 = \frac{L_2 + 3L_1}{2} \right),$$

segue que s é um sistema linear possível e indeterminado. Escalonando o sistema linear s chegamos a: $s : \begin{cases} x \quad + 2z = -1 \\ \quad y - z = -2 \end{cases}$ e, por isso, a solução de s pode ser representada por

$$x = -1 - 2z, \ y = -2 + z \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

f) A matriz principal do sistema linear s é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Assim,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (L_2 = -2L_1).$$

Como

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 10 + 8 - 8 + 5 + 8 = 27 \neq 0,$$

segue que s é um sistema linear impossível. Portanto, s não tem solução.

■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.

3.4 Exercícios

Exercício 3.4.1 *Discuta cada um dos sistemas lineares a seguir e encontre, se existir, a solução do sistema, usando a Regra de Cramer.*

a) $s : \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 5 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$; *c)* $s : \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$;

b) $s : \begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$; *d)* $s : \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$;

e) $s:\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$;

f) $s:\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$;

g) $s:\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$;

h) $s:\begin{cases} 3x + 4y - z + 2t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 5 \\ -x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + 7y + z + t = -1 \end{cases}$;

i) $s:\begin{cases} x + 4y - 2z + t = -2 \\ 2x - y + 3z - t = 2 \\ 2x + y - 2z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 4 \end{cases}$.

Exercício 3.4.2 *Determine valores de k, se existir, de modo que o sistema linear s :*
$\begin{cases} -x + 2y + kz = 1 \\ kx + 4y - 4z = 2 \\ 2x + y + z = -2k \end{cases}$ *seja possível e indeterminado.*

Exercício 3.4.3 *Determine valores de k, se existir, de modo que o sistema linear s :*
$\begin{cases} 2x + y + 2kz = 0 \\ 2x + ky - 2z = -2 \\ 2x + 3y + z = 3k \end{cases}$ *seja impossível.*

Exercício 3.4.4 *Encontre, se existir, uma solução para o sistema linear*

$$s:\begin{cases} x - y\cos(C) - z\cos(B) = 0 \\ -x\cos(C) + y - z\cos(A) = 0 \\ -x\cos(B) - y\cos(A) + z = 0 \end{cases} .$$