1.11 Algumas parametrizações úteis

Algumas curvas tem parametrizações conhecidas e/ou de fácil construção e, por isso, é preciso saber fazer essas parametrizações. A primeira curva que vamos construir a parametrização é a *Reta*.

Parametrização da Reta

Da Geometria Analítica, temos que uma equação vetorial para uma determinada reta r que passa pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{b}$, como visto na Figura 1.21, é dada por

$$r : \vec{r}(t) = A + \vec{b}t,$$

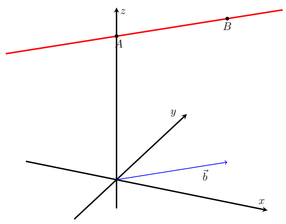

Figura 1.21: Ilustração de uma reta que passa pelos pontos A e B.

onde A e $\vec{b}$ são constantes e $t \in \mathbb{R}$. Supondo que $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, então, temos que

$$r : \vec{r}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t).$$

Dessa forma, temos que as equações paramétricas da reta r que passa por $A = (a_1, a_2, a_3)$ e tem direção dada por $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ficam dadas por:

$$r : \begin{cases} x(t) = a_1 + b_1 t \\ y(t) = a_2 + b_2 t, \ t \in \mathbb{R} \\ z(t) = a_3 + b_3 t \end{cases}.$$

Lembre-se que retas já foram estudadas no curso de Geometria Analítica, dessa forma, só estamos relembrando tal assunto. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.11.1 *Encontre uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto $A = (2, 1, -1)$ e que tem a direção do vetor $\vec{b} = (2, -3, 1)$.*

Solução: Temos que uma equação vetorial para a reta r fica dada por

$$r : \vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t = (2 + 2t, 1 - 3t, -1 + t).$$

Dessa forma, uma representação paramétrica da reta r é:

$$r : \begin{cases} x(t) = 2 + 2t \\ y(t) = 1 - 3t, \ t \in \mathbb{R} \\ z(t) = -1 + t \end{cases}.$$

Um esboço dessa reta r é apresentado na Figura 1.22. ■

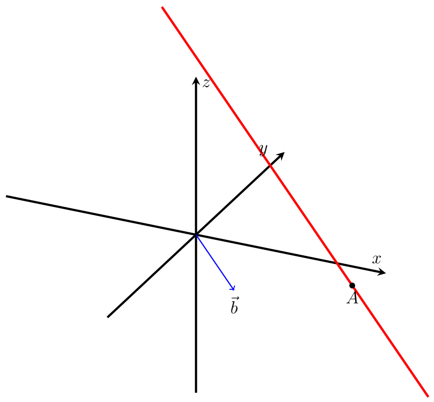

Figura 1.22: Esboço da curva r dada por $\vec{r}(t) = (2+2t)\vec{i}+(1-3t)\vec{j}+(-1+t)\vec{k}$.

Exemplo 1.11.2 *Determine uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos* $A = (2, 0, 1)$ *e* $B = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Solução: Temos que um vetor diretor $\vec{b}$ para a reta fica dado por

$$\vec{b} = \hat{AB} = B - A = \left(-3, \frac{1}{2}, -1\right).$$

Dessa forma, temos que uma equação vetorial para a reta r fica dada por

$$r : \vec{r}(t) = \left(2 - 3t, \frac{t}{2}, 1 - t\right).$$

Consequentemente, uma representação paramétrica para a reta r é

$$r : \begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = \dfrac{t}{2} \\ z(t) = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

Um esboço da reta r é dado pela Figura 1.23. ■

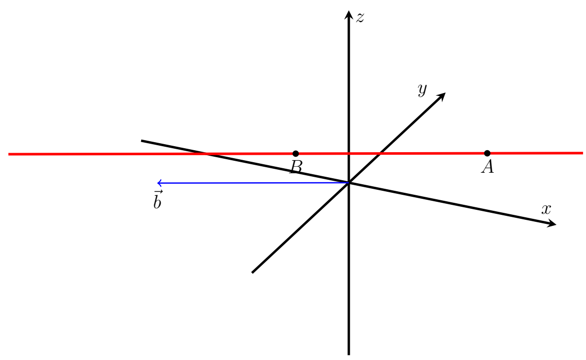

Figura 1.23: Esboço da curva r dada por $\vec{r}(t) = \left(2 - 3t, \frac{t}{2}, 1 - t\right)$.

Exemplo 1.11.3 *Parametrize o segmento de reta que une o ponto* $A = (0,0,1)$ *ao ponto* $B = (1,2,3)$*, no sentido de* A *para* B*.*

Solução: Um segmento de reta é um subconjunto de uma reta e, por isso, suas equações são similares, mudando apenas o intervalo de variação do parâmetro t. Uma equação vetorial para uma reta r é dada por

$$r : \vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t, \;\; t \in [a,b].$$

Dessa forma, tomando $\vec{a} = A$, segue que para $t = 0$, $\vec{r}(0) = A$. Por outro lado, tomando $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,2)$, temos que para $t = 1$, $\vec{r}(1) = B$. Portanto, o segmento de reta ligando os pontos A e B fica parametrizado por

$$r : \vec{r}(t) = A + \overrightarrow{AB} \cdot t = (t, 2t, 1+2t), \;\; t \in [0,1].$$

■

Parametrização de uma Circunferência

Seja c uma circunferência de centro $O = (0,0)$ (na origem) e raio $r > 0$. Dessa forma, temos que c está contida no plano XY. Considere $0 \leq t \leq 2\pi$, o ângulo formado pelo semi-eixo positivo X e o vetor posição de cada ponto da curva, como visto na Figura 1.24.

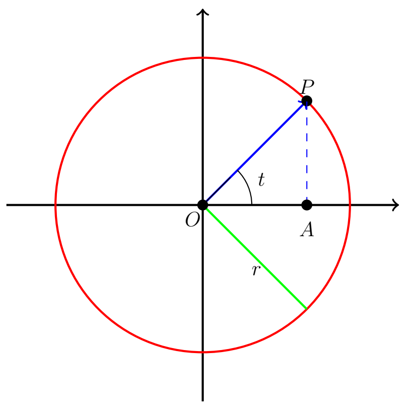

Figura 1.24: Ilustração de uma circunferência de centro $O = (0,0)$ e raio $r > 0$.

Do triângulo OPA temos que

$$\begin{cases} x(t) = rcos(t) \\ y(t) = rsen(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}.$$

Portanto, uma equação vetorial para a circunferência de centro na origem e raio r fica dada por

$$c : \vec{r}(t) = (rcos(t), rsen(t), 0), \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Agora, suponha que a circunferência c não esteja na origem, ou seja, que o seu centro esteja num ponto $Q = (a,b)$, como visto na Figura 1.25.

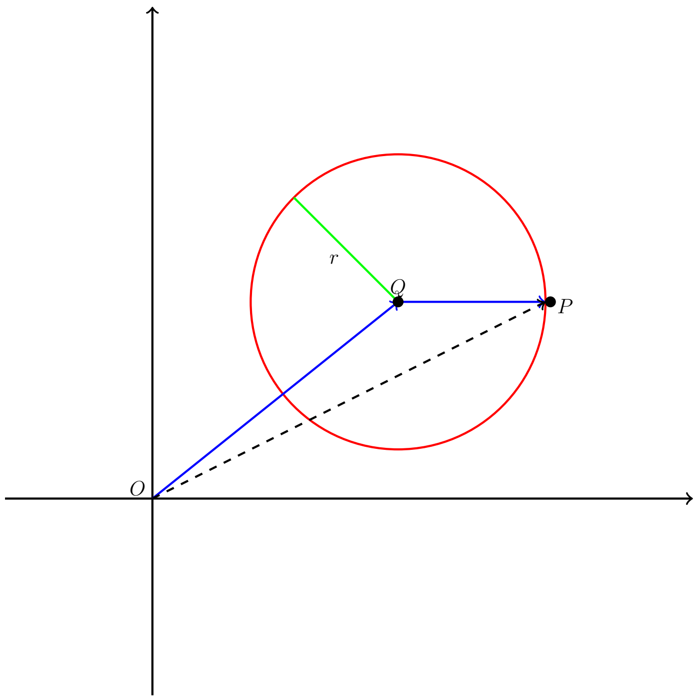

Figura 1.25: Ilustração de uma circunferência de centro $Q = (a, b)$ e raio $r > 0$.

Observe que $\overrightarrow{OP}$ fica dado por

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}.$$

Como $\overrightarrow{OQ}(t) = (a, b)$ e $\overrightarrow{QP}(t) = (rcos(t), rsen(t))$, segue que uma equação vetorial para a circunferência c de centro $Q = (a, b)$ e raio $r > 0$ fica dada por

$$c : \overrightarrow{OP}(t) = (a + rcos(t), b + rsen(t), 0),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e, consequentemente, equações paramétricas para uma circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$ ficam dadas por

$$c : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = a + rcos(t) \\ y(t) = b + rsen(t),\ \ t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = 0 \end{array} \right. .$$

Aqui consideramos que a circunferência estava no plano XY e, consequentemente, $z(t) = 0,\ \forall\ t$. Poderíamos tomar c em um plano paralelo a XY e, nesse caso, teríamos a variável $z = k \in \mathbb{R}$, visto que a circunferência é uma curva plana. Podemos ter também c paralelo a qualquer um dos outros planos XZ ou YZ, como apresentado a seguir.

Observação 1.11.1 *Como a circunferência é uma curva plana, podemos usar apenas duas funções coordenadas para representá-la. Com isso, a terceira função coordenada assume valor constante. Dessa forma, teremos*

- *no plano XY a circunferência c de centro (a, b, k) e raio $r > 0$ e, por isso,*

$$c : \vec{r}(t) = (a + rcos(t), b + rsen(t), k),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi;$$

- *no plano XZ a circunferência c de centro (a, k, b) e raio $r > 0$ e, por isso,*
$$c : \vec{r}(t) = (a + rcos(t), k, b + rsen(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi;$$

- *no plano YZ a circunferência c de centro (k, a, b) e raio $r > 0$ e, por isso,*
$$c : \vec{r}(t) = (k, a + rcos(t), b + rsen(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.11.4 *Obtenha uma equação vetorial para a circunferência c : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$, no plano $z = 3$.*

Solução: Temos que

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2.$$

Dessa forma temos que a circunferência c tem centro no ponto $O = (3, 2, 3)$ e raio $r = 3$. Com isso,

$$c : \begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos(t) \\ y(t) = 2 + 3\text{sen}(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = 3 \end{cases}.$$

Portanto, uma equação vetorial para a circunferência é dada por

$$c : \vec{r}(t) = (3 + 3\cos(t), 2 + 3\text{sen}(t), 3),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Um esboço desta circunferência é dado pela Figura 1.26. ■

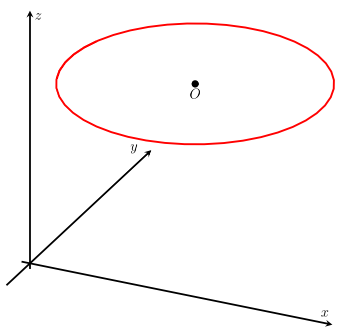

Figura 1.26: Ilustração de uma circunferência de centro $O = (3, 2, 3)$ e raio $r = 3$.

Exemplo 1.11.5 *A equação vetorial $c : \vec{r}(t) = (2, 3\cos(t), 3sen(t))$ representa uma circunferência. Determine a correspondente equação cartesiana dessa circunferência.*

Solução: Temos que a circunferência c tem raio 3 e está contida no plano $x = 2$. Como

$$c: \begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 3cos(t) \\ z(t) = 3sen(t) \end{cases} \Rightarrow c: \begin{cases} x(t) = 2 \\ y^2(t) = 9cos^2(t) \\ z^2(t) = 9sen^2(t) \end{cases},$$

segue que

$$y^2 + z^2 = 9cos^2(t) + 9sen^2(t) = 9(cos^2(t) + sen^2(t)) = 9.$$

Portanto, a circunferência c fica dada por

$$c: y^2 + z^2 = 9, \ x = 2.$$

Um esboço da circunferência c é dado pela Figura 1.27. ■

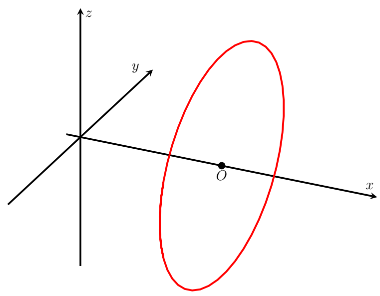

Figura 1.27: Ilustração da circunferência $y^2 + z^2 = 9, \ x = 2$.

Exemplo 1.11.6 *Parametrize uma circunferência de centro $O = (0,0)$ e raio $r > 0$, nos sentidos horário e anti-horário.*

Solução: Seja c uma circunferência de centro $O = (0,0)$ e raio $r > 0$. Dessa forma, uma parametrização para c, no sentido anti-horário, é dada por

$$c: \vec{r}(t) = (rcos(t), rsen(t)),$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Assim, uma parametrização para c, no sentido horário, fica dada por

$$-c: \vec{r}(0+2\pi-t) = (rcos(2\pi-t), rsen(2\pi-t)) = (rcos(t), -rsen(t)), \ t \in [0, 2\pi].$$

■

Parametrização da Elipse

Considere a elipse $c : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (com $a > b$), e considere um ponto $P = (x(t), y(t))$ da curva. Trace um arco de circunferência de raio a e outro de raio b, ambos centrados na origem. Marque sobre esses arcos os pontos A, de abscissa x, na circunferência de raio a, e B, de ordenada y, na outra, como visto na 1.28.

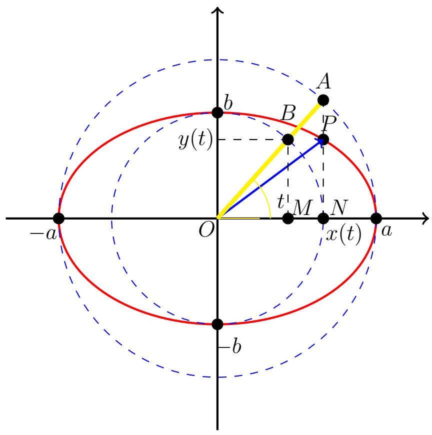

Figura 1.28: Ilustração de uma elipse centrada na origem.

É possível provar que os pontos A, B, O são colineares. O parâmetro t representa o ângulo que essa reta faz com o semi-eixo positivo x.

Considere N a projeção do ponto A e M a projeção de B, ambos sobre o eixo das abscissas. Do triângulo retângulo ONA, temos que $x(t) = acos(t)$ e do triângulo OMB obtemos que $y(t) = bsen(t)$. Assim, uma equação vetorial da elipse no plano XY fica dada por

$$c : \vec{r}(t) = (acos(t), bsen(t), 0),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Agora, considere uma elipse centrada no ponto $Q = (m, n)$, com eixos paralelos aos eixos coordenados, conforme a Figura 1.29.

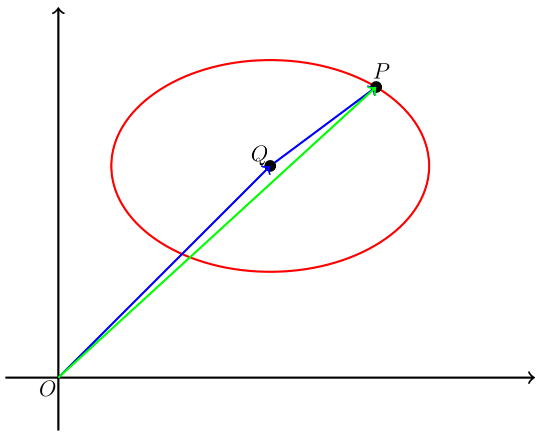

Figura 1.29: Esboço da elipse com $a > b$ centrada no ponto $Q = (m, n)$ com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Logo, uma equação vetorial para a elipse c fica dada por

$$c : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP},$$

e, consequentemente,

$$c : \vec{r}(t) = (m + acos(t), n + bsen(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Da mesma forma que a circunferência temos que a elipse é uma curva plana, sendo necessária apenas duas funções coordenada para a representá-la. As adaptações para as elipses nos planos XZ e YZ também são feitas de maneira análoga a circunferência. Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.11.7 *Escreva uma equação vetorial para a elipse dada pela equação cartesiana* $c: 9x^2 + 4y^2 = 36$*, no plano* XY*.*

Solução: Temos que

$$c: 9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow c: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow c: \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Assim, uma equação vetorial para a elipse fica dada por

$$c: \vec{r}(t) = (2cos(t), 3sen(t), 0), \ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

■

Exemplo 1.11.8 *Encontre uma equação vetorial para a elipse dada pela Figura 1.30.*

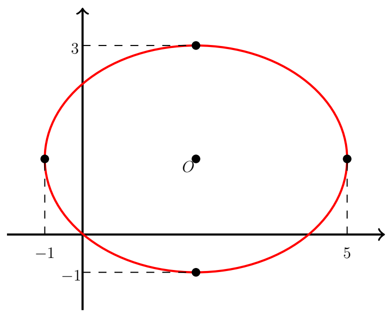

Figura 1.30: Esboço da elipse do Exemplo 1.11.8.

Solução: Uma equação cartesiana para a elipse c fica dada por

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Assim, as suas equações paramétricas são dadas por

$$c: x(t) = 2 + 3cos(t), \ \ y(t) = 1 + 2sen(t) \text{ e } z(t) = 0.$$

Portanto, uma equação vetorial para a elipse c fica dada por

$$c: \vec{r}(t) = (2 + 3cos(t), 1 + 2sen(t), 0), \ \ t \in [0, 2\pi].$$

■

Outras Parametrizações

O estudo de curvas é muito rico e amplo e aqui estamos apenas relembrando algumas propriedades que nos auxilie nesse curso. Em outros cursos foi visto a parametrização de algumas curvas muito utilizadas por nós como, por exemplo, a reta, circunferência e elipse, parábola, hipérbole, etc.. Provavelmente você já cruzou com outras curvas menos conhecidas como, por exemplo, a *Folium* de Descartes, *Lemmiscata* de Bernoulli, etc.

Não vamos estudar um grande número de curvas, pois esse não é o objetivo do curso. A seguir, vamos estudar outras parametrizações para nos indicarmos como fazer no futuro, caso seja necessário. Vamos iniciar com a *Hélice Circular*, que já sabemos ser uma curva reversa e que se desenvolve sobre uma superfície cilíndrica.

Considere parte de uma superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = r^2$. Enrole em volta da superfície um triângulo retângulo flexível ABC de modo que $A = (r, 0, 0)$ e que $\overline{AB}$ seja o cateto que está no plano XY. A hipotenusa $\overline{AC}$, determina sobre a superfície cilíndrica uma hélice circular, como pode ser visto na Figura 1.31.

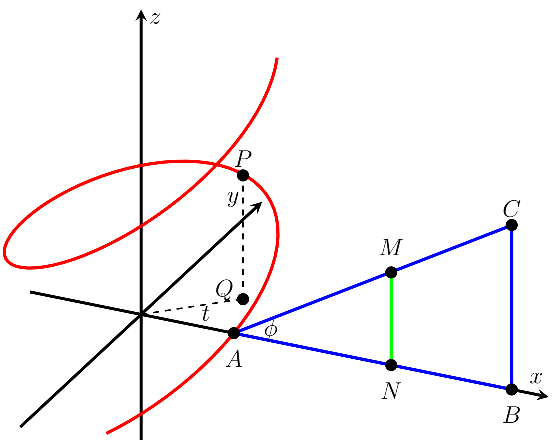

Figura 1.31: Representação gráfica de uma hélice circular.

Considere um ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da hélice, cuja projeção no plano XY seja Q. O ponto P corresponde ao ponto M no triângulo ABC. A projeção de M no eixo x é N. Além disso, os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{MN}$ possuem a mesma medida e que o segmento $\overline{AN}$ tem o mesmo comprimento do arco $\widehat{AQ} = rt$. Como $tan(\phi) = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{AN}}$, segue que $\overline{PQ} = \overline{MN} = rt \cdot \tan(\phi)$.

Dessa forma, temos que uma parametrização para a hélice circular fica dada por

$$\begin{cases} x(t) = rcos(t) \\ y(t) = rsen(t) \\ z(t) = rt \cdot tan(\phi) \end{cases},$$

onde ϕ é o ângulo agudo $B\hat{A}C$ que define o crescimento em relação ao eixo z. Portanto, tomando $tg(\phi) = m$, uma equação vetorial para a hélice circular fica dada por

$$\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\text{sen}(t), rmt),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.11.9 *Encontre uma parametrização para a hélice dada pela equação* $z^2 + y^2 - 4z - 6y = 0$ *e tem inclinação na direção do eixo* x *dada pela reta* $c : u = 2x - 4$.

Solução: Observe que

$$z^2 + y^2 - 4z - 6y = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2 + (z-2)^2 = 13.$$

Assim, temos uma hélice circular com eixo paralelo ao eixo x passando nos pontos $y = 3$ e $z = 2$ e, além disso, com raio da superfície cilíndrica igual a $\sqrt{13}$. Agora, para o eixo x, como a inclinação é dada pela reta r, segue que o coeficiente angular da reta c é $m = 2$. Sendo o raio $\sqrt{13}$, segue que $rmt = 2\sqrt{13}t$. Portanto, uma parametrização para a hélice circular dada pela equação $z^2 + y^2 - 4z - 6y = 0$ e tem inclinação na direção do eixo x dada pela reta $c : u = 2x - 4$ é

$$\begin{cases} x(t) = 2\sqrt{13}t \\ y(t) = 3 + \sqrt{13}cos(t),\ \ t \in \mathbb{R} \\ z(t) = 2 + \sqrt{13}sen(t) \end{cases}.$$

■

Vamos falar agora de outra curva, a *Cicloide*, que é uma das *Rosáceas*. Uma cicloide pode ser descrita pelo movimento do ponto $P = (0, 0)$ de um círculo de raio r, centrado no ponto $C = (0, r)$ quando o círculo gira sobre o eixo das abscissas, como visto na Figura 1.32.

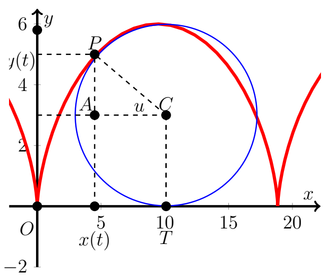

Figura 1.32: Representação gráfica de uma Cicloide.

Quando o círculo gira um ângulo t, seu centro se move um comprimento $\overline{OT}$. Da Figura 1.32 temos que o segmento $\overline{OT}$ tem a mesma medida do arco $\widehat{TP} = rt$, onde t é o ângulo $P\hat{C}T$. Além disso, $\overline{CT}$ tem a mesma medida do raio r.

Seja u o ângulo $P\hat{C}A$. Assim, $u = t - 90^o$. Da parametrização da circunferência temos que

$\overline{AC} = rcos(u) = rcos(t-90^o) = r(cos(t)cos(90^o)+sen(t)sen(90^o)) = sen(t)$ e

$\overline{AP} = rsen(u) = rsen(t-90^o) = r(sen(t)cos(90^o)-sen(t)cos(90^o)) = -cos(t)$.

Assim, as coordenadas de P são dadas por:

$$\begin{array}{l} x(t) = \overline{OT} - \overline{AC} = r(t - sen(t)) \text{ e} \\ y(t) = \overline{TC} + \overline{AP} = r(1 - cos(t)). \end{array}.$$

Portanto, uma equação vetorial para o cicloide fica dada por

$$\vec{r}(t) = (r(t - sen(t)), r(1 - cos(t))), \ t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.11.10 *Escreva a equação vetorial de uma curva descrita pelo movimento de uma cabeça de prego num pneu de carro que se move em linha reta, se o raio do pneu é* $25cm$.

Solução: Supondo que a cabeça do prego se encontra localizada no pneu num ponto P, como na Figura 1.32, sua trajetória é uma cicloide. Então:

$$\vec{r}(t) = (25(t - \operatorname{sen}(t)), 25(1 - \cos(t))).$$

■

De uma maneira geral, quando temos uma equação cartesiana de uma curva, podemos definir que uma das variáveis é o nosso parâmetro e encontrar as outras coordenadas em função dessa, como veremos a seguir.

Exemplo 1.11.11 *Escreva uma equação vetorial para* $y = 5x + 3$, *no plano* $z = 2$.

Solução: Tomando $x(t) = t$, temos que $y(t) = 5t + 3$ e $z(t) = 2$. Logo, uma equação vetorial para a curva fica dada por:

$$\vec{r}(t) = (t, 5t + 3, 2).$$

■

Observação 1.11.2 *É importante ressaltar que uma parametrização de uma curva não é única. Por exemplo, no Exemplo 1.11.11, considerando* $x(t) = 2t + 1$, *segue que* $y(t) = 10t + 8$ *e* $z(t) = 2$ *e, por isso, a curva fica dada pela equação vetorial*

$$\vec{r}(t) = (2t + 1, 10t + 8, 2).$$

Exemplo 1.11.12 *A intersecção entre as superfícies* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 2 + y$ *determina uma curva. Escreva uma equação vetorial dessa curva.*

Solução: Como $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$, segue que $x^2 + y^2 = 2 + y$, ou seja, a equação que representa a intersecção das duas superfícies é dada por $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$. Em outras palavras, a curva que está na intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$ é uma circunferência de raio $\frac{3}{2}$ e centro $C = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Assim,

$$\begin{array}{c} x(t) = \frac{3}{2}cos(t) \\ y(t) = \frac{3}{2}sen(t) + \frac{1}{2} \\ z(t) = 2 + y = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}sen(t) \end{array},$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Portanto, uma equação vetorial para a curva fica dada por

$$\left(\frac{3}{2}cos(t), \frac{3}{2}sen(t) + \frac{1}{2}, \frac{5}{2} + \frac{3}{2}sen(t)\right),\ t \in [0, 2\pi].$$

■

Exemplo 1.11.13 *Encontre uma representação paramétrica para curva dada pela intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.*

Solução: Temos que $x = 2 - y$. Assim, substituindo na segunda equação chegamos a

$$(2 - y)^2 + y^2 + z^2 = 2 \cdot 2 \Rightarrow 4 - 4y + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(y^2 - 2y + 1) + 2 + z^2 = 4 \Rightarrow 2(y - 1)^2 + z^2 = 2.$$

Dessa forma, temos que a equação da curva dada pela intersecção das superfícies equivale a $z^2 + 2(y - 1)^2 = 2^2$, ou seja, a curva de intersecção é a elipse $(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$. Assim, uma equação vetorial para a curva fica dada por

$$\begin{array}{c} y(t) = 1 + cos(t) \\ z(t) = \sqrt{2}sen(t) \\ x(t) = 2 - y = 1 - cos(t) \end{array}.$$

■

Agora, vamos aos exercícios.

1.12 Exercícios

Exercício 1.12.1 *Obtenha uma parametrização para a curva c e outra para a curva $-c$.*

a) $x^2 + y^2 = 4,\ z = 4$;

b) $y = 2x^2,\ z = x^3$;

c) $2(x + 1)^2 + y^2 = 10,\ z = 2$;

d) $y = x^{1/2},\ z = 2$;

e) $x = e^y,\ z = e^x$;

f) $y = x,\ z = x^2 + y^2$;

g) $y^2 - 4y + 2x = 0$;

h) $y = 2x - 5$;

i) $x^2 = y^4$;

j) $x = z$ *e* $y = 2$;

k) $x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y)$ *e* $x + y = 3$;

l) $2x - 3 = 4y - 7$ *e* $2z - 5y = 12$;

m) $z = x^2 + 2y^2$ *e* $2x - 4y = 6$;

n) *O segmento de reta de* $A = (2, 1, 2)$ *a* $B = (-1, 1, 3)$;

o) *O segmento de reta de* $C = (0, 0, 1)$ *a* $D = (1, 0, 0)$;

p) *A parábola* $y = \pm\sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 1$;

q) *O segmento de reta de* $A = (1, -2, 3)$ *a* $B = (-1, 0, 1)$;

Exercício 1.12.2 *Encontre uma equação vetorial para cada uma das retas a seguir.*

a) $y = 5x - 1,\ z = 2$;

b) $2x - 5y + 4z = 1,\ 3x - 2y - 5z = 1$;

c) $2x - 5y + z = 4,\ y - x = 4$;

d) *a reta que passa pelos pontos* $A = (1, 2, 3)$ *e* $B = (-2, 5, -1)$;

e) *a reta que passa pelos pontos* $A = (-2, 0, -1)$ *e* $B = (1, 2, 2)$;

f) *a reta que passa pelos pontos* $A = (1, 2, 3)$ *e tem direção dada pelo vetor* $\vec{v} = (-2, 5, -1)$;

g) *a reta que passa pelos pontos* $A = (0, 0, 1)$ *e tem direção dada pelo vetor* $\vec{v} = (1, 1, 0)$;

h) *a reta que passa pelos pontos* $A = (1, 2, 3)$ *e tem direção dada pelo vetor* $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Exercício 1.12.3 *Determine o centro e o raio das seguintes circunferências e depois escreva uma equação vetorial para cada uma delas.*

a) $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 5y - 2 = 0$.

Exercício 1.12.4 *Encontre a equação cartesiana para cada uma das curvas a seguir.*

a) $c : \vec{r}(t) = (\frac{1}{2}t, 3t + 5)$;

b) $c : \vec{r}(t) = (t-1, t^2 - 2t + 2)$;

c) $c : \vec{r}(t) = (s^2 - 1, s^2 + 1, 2)$.

d) $c : \vec{r}(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^2}{2} - t\right)$;

e) $c : \vec{r}(t) = \left(t^2 + 2t, t^2 - 2t\right)$;

f) $c : \vec{r}(t) = \left(2t^2, 2t^3\right)$;

g) $c : \vec{r}(t) = \left(3t^2, -4e^{2t}\right)$;

h) $c : \vec{r}(t) = (2 + rcos(t), -1 + rsen(t))$;

i) $c : \vec{r}(t) = \left(6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4\right)$.