Capítulo 2

Integrais Múltiplas

2.1 Introdução

A integral definida de uma função de uma variável pode ser estendida a um função de várias variáveis. A integral de uma função de uma variável é chamada de *Integral Simples* enquanto que as derivadas de múltiplas variáveis é chamada de *Integral Múltipla.* As interpretações físicas e geométricas de integrais simples são similares para as integrais múltiplas.

Para resolver integral definida simples exigíamos que a função estivesse definida num intervalo fechado R. Para a integral dupla, vai ser exigido que a função seja definida numa região fechada R^2. Assim, nesse capítulo, sempre que se falarmos de uma região R^2, estaremos fazendo referencia a uma região fechada. Vamos a primeira definição.

Definição 2.1.1 *Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, dois pontos do Re^2 tal que $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$. Assim, um* Retângulo *formado por A e B é a região do plano que tem como lados segmentos paralelos ao eixos coordenados cuja extremidades são as coordenadas dos pontos dados.*

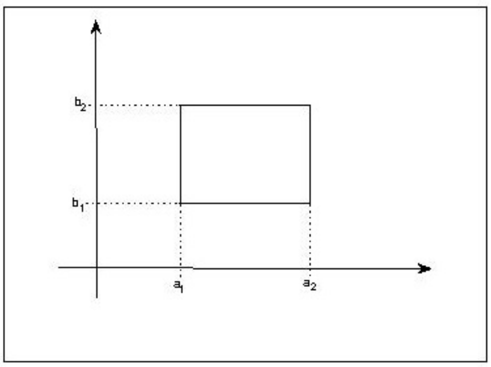

Figura 2.1: Ilustração da Definição 2.1.1.

Observação 2.1.1 *Dois pontos da Definição 2.1.1, junto com os pontos (b_1, a_2) e (a_1, b_2), são chamados de* Vértices *do retângulo. Os segmentos de reta que unem vértices consecutivos são chamados de* Arestas *do retângulo. Os pontos da parte interna do retângulo formam o* Retângulo Aberto *do* *retângulo e o conjunto de todos os pontos interiores e os pontos das arestas do retângulo formam o* Retângulo Fechado*.*

Denote por R a região da Figura 2.1 e seja f uma função definida em R. A região R é a região de integração para a função f. Agora, trace retas paralelas aos eixos coordenados e obtenha uma rede de sub-regiões retangular da região R, definindo várias partições. A *norma* desta partição, denotada por $|| \Delta ||$, é determinada pelo maior comprimento da maior diagonal de uma sub-região retangular da partição. Enumere a partição arbitrariamente, digamos até n, denote a largura da i-ésima sub-região por $\Delta_i x$ unidades e sua altura por $\Delta_i y$. Então, se $\Delta_i A$ unidades quadradas é a área da i-ésima sub-região retangular

$$\Delta_i A = \Delta_i x \Delta_i y.$$

Seja (ϕ_i, ψ_i) um ponto arbitrário na i-ésima sub-região e $f(\phi_i, \psi_i)$ o valor da função neste ponto. Considere o produto $f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A$. Associando com cada termo das n sub-regiões tal produto, a sua soma é

$$\sum_{i=1}^{n} f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A. \tag{2.1}$$

Existem muitas somas da forma 2.1, pois a norma da partição pode ser um número positivo qualquer e cada ponto (ϕ_i, ψ_i) pode ser qualquer ponto da i-ésima sub-região. Se todas as somas podem ser tomadas arbitrariamente próximas de um número L, tomando partições com normas suficientemente pequenas, então L é definido como o limite destas somas quando a norma da partição R aproxima-se de zero.

Definição 2.1.2 *Seja f uma função definida numa região retangular fechada R. Dizemos que o número L é o limite de somas da forma*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A,$$

se L satisfazer a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A - L \right| < \epsilon$$

para toda partição Δ para a qual $|| \Delta || < \delta$ e para todas as possíveis escolhas de (ϕ_i, ψ_i) no i-ésimo retângulo, $i = 1, 2, \cdots, n$. Se tal número L existir, escrevemos

$$\lim_{||\delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A = L.$$

Se existe um número L satisfazendo a Definição 2.1.2, é possível mostrar que ele é único, utilizando o fato que o limite de uma função é único.

Definição 2.1.3 *Dizemos que uma função f de duas variáveis é* Integrável *numa região retangular R, se f é definida em R e o número L da Definição 2.1.2 existir. Esse número L é chamado de a Integral Dupla de f em R, e escrevemos*

$$\lim_{||\delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A = \iint_R f(x,y)dA \tag{2.2}$$

Outros símbolos para a integral 2.2 são:

$$\iint_R f(x,y)dxdy \quad e \quad \iint_R f(x,y)dydx.$$

Vamos aos primeiros resultados.

Teorema 2.1.1 *Se uma função f de duas variáveis é contínua numa região retangular fechada R, então f é integrável em R.*

Demonstração: A demonstração deste teorema não é feita neste texto, podendo ser achada em livros de Cálculo Avançado. ■

Vamos aos exemplos.

Exemplo 2.1.1 *Encontre um valor aproximado da integral dupla $\iint_R (2x^2 - 3y)dA$, onde R é a região retangular com vértices $(-1,1)$ e $(2,3)$. Tome uma partição de R formada pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 2$, e tome (ϕ_i, ψ_i) no centro da i-ésima sub-região.*

Solução: Veja a Figura 2.2, que mostra a região R dividida em seis sub-regiões que são quadrados com lados de uma unidade de comprimento. Assim, para cada i, $\Delta_i A = 1$. Em cada uma das sub-regiões tome como sendo o ponto (ϕ_i, ψ_i) o centro do quadrado. Assim, uma aproximação para a integral dupla é dada por

$$\iint_R f(x,y)dA = f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}).1 + f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}).1 + f(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}).1 + f(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}).1 + f(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}).1 =$$

$$= -4 - 40 - 3 - 7 - 7 = -25.$$

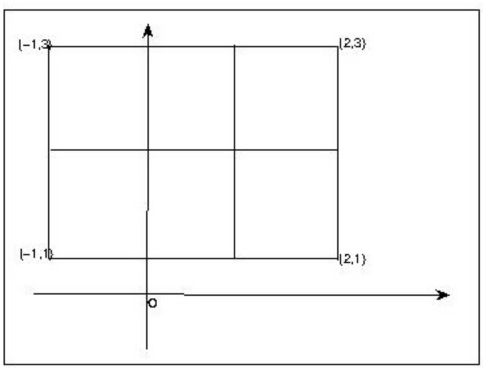

Figura 2.2: Figura do Exemplo 2.1.1.

■

O valor exato da Integral Dupla no Exemplo 2.1.1, como será mostrado mais tarde é -24. O próximo resultado é apresentado a seguir.

Teorema 2.1.2 *Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa região fechada R no plano XY e $f(x,y) \geq 0$, para todo (x,y) em R. Se $V(S)$ é a medida do volume do sólido S que tem a região R como base e uma altura de medida $f(x,y)$ no ponto (x,y) em R, então,*

$$V(S) = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i, \psi_i)\Delta_i A = \iint_R f(x,y)dA.$$

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Vejamos os próximos exemplos.

Exemplo 2.1.2 *Aproxime o volume do sólido limitado pela superfície $f(x,y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$, os planos $x = 3$, $y = 2$ e os eixos coordenados.*

Solução: Para encontrarmos uma aproximação para o valor da integral dupla, tome uma partição da região no plano XY, traçando as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 1$ e tomemos (ϕ_i, ψ_i) no centro da i-ésima sub-região. Do Teorema 2.1.2, se V é o volume do sólido, então,

$$V(S) = \iint_R (4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2)dA.$$

Assim,

$$V \approx f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right).1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right).1 =$$

$$= \left(4 - \frac{25}{576}\right) + \left(4 - \frac{17}{64}\right) + \left(4 - \frac{409}{576}\right) + \left(4 - \frac{97}{576}\right) + \left(4 - \frac{25}{64}\right) + \left(4 - \frac{481}{576}\right) =$$

$$= 24 - \frac{695}{288} \approx 21,59,$$

desse modo o volume é aproximadamente $21,59$ unidades cúbicas. ■

O volume exato desse sólido será calculado na próxima seção. Várias propriedades da integração simples são apresentadas a seguir. Note que elas são similares as propriedades para integral simples. Vejamos os próximos resultados.

Teorema 2.1.3 *Se c é uma constante e f uma função integrável numa região fechada R, então, a função cf é integrável em R, e*

$$\int\int_R cf(x,y)dA = c.\int\int_R f(x,y)dA.$$

Demonstração: Deixada como exercício. ■

Teorema 2.1.4 *Se as funções f e g são integráveis numa região fechada R, então, a função $f+g$ é integrável em R e*

$$\int\int_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \int\int_R f(x,y)dA + \int\int_R g(x,y)dA.$$

Demonstração: Deixada como exercício. ■

Teorema 2.1.5 *Se as funções f e g são integráveis numa região fechada R e $f(x,y) \geq g(x,y)$, pata todo (x,y) em R, então,*

$$\int\int_R f(x,y)dA \geq \int\int_R g(x,y)dA.$$

Demonstração: Deixada como exercício. ■

Teorema 2.1.6 *Seja a função f integrável numa região fechada R e considere m e M tais que $m \leq f(x,y) \leq M$, para todo (x,y) em R. Então, se A é a medida da área da região R, temos*

$$mA \leq \int\int_R f(x,y)dA \leq MA.$$

Demonstração: Deixada como exercício. ■

Teorema 2.1.7 *Seja f uma função contínua numa região fechada R, tal que a região R seja composta de duas sub-regiões S e U que não tenha ponto em comum, exceto os pontos da fronteira. Então,*

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_S f(x,y)dA + \int\int_U f(x,y)dA.$$

Demonstração: Deixada como exercício. ■

Façamos alguns exercícios. Na próxima seção trabalharemos com o cálculo das integrais duplas propriamente dita.

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1 *Ache um valor aproximado da integra dupla $\int\int_R (3x-2y+1)dA$, onde R é a região retangular com vértice $(0,-2)$ e $(3,0)$. Faça uma partição de R com as retas $x=1$, $x=2$ e $y=-1$ e considere (ξ_i,γ_i) como sendo o centro da i-ésima sub-região.*