7.4 Continuidade Uniforme

Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Assim, dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $y \in X$ e $|y - x| < \delta$, então, $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Nesse ponto é importante ressaltar que o número δ não depende apenas do ϵ, pois ele também pode depender do ponto x escolhido para se analisar a continuidade. A seguir explicitaremos exemplos para provar que mesmo uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo contínua em todos os pontos do seu domínio, nem sempre, dado $\epsilon > 0$, é possível obter um $\delta > 0$ que sirva para todos os pontos $x \in X$.

Exemplo 7.4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Assim, temos que $f(x) = 1$, se $x > 0$, e $f(x) = -1$, caso contrário. Temos que f é contínua para todos os pontos do seu domínio, visto que f é a divisão de duas funções contínuas cujo denominador não se anula para pontos do D_f. Contudo, tomando $\epsilon < 2$, para todo $\delta > 0$ que escolhermos, existirão sempre pontos $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $|y - x| < \delta$ mas $|f(y) - f(x)| \geq \epsilon$. Por exemplo, tome $y = \dfrac{\delta}{3}$ e $x = -\dfrac{\delta}{3}$. Dessa forma, temos que $|y - x| = \dfrac{\delta}{3} - \left(-\dfrac{\delta}{3}\right) = \dfrac{2\delta}{3} < \delta$, mas*

$$|f(y) - f(x)| = 1 - (-1) = 2 > \epsilon.$$

■

Exemplo 7.4.2 *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Assim, temos que f é contínua para todos os pontos do seu domínio. Observe que, para todo $0 < \epsilon < 1$, seja qual for o $\delta > 0$ escolhido, tomando um número natural $n > \dfrac{1}{\delta}$ e escolhendo $x = \dfrac{1}{n}$ e $y = \dfrac{1}{2n}$, segue que*

$$|y - x| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \delta,$$

mas

$$|f(y) - f(x)| = 2n - n = n \geq 1 > \epsilon.$$

■

Definição 7.4.1 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **Uniformemente Contínua** no conjunto X, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente podemos obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $|y - x| < \delta$ impliquem em $|f(y) - f(x)| < \epsilon$.*

■

Observação 7.4.1 *a) Se uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então, ela é contínua em todos os pontos do seu domínio.*

De fato: *Fixe x, para cada $x \in X$ na Definição 7.4.1 e, dessa forma, obtemos a definição de continuidade para todos os pontos do domínio.* □

b) *Uma função pode ser contínua em todos os pontos do seu domínio e, mesmos assim, não será uniformemente contínua. Por exemplo, as funções apresentadas nos Exemplos 7.4.1 e 7.4.2 são contínuas em seu domínio mas não são uniformemente contínuas.*

c) *Na Definição 7.1.1 (Continuidade), tomamos um ponto fixo a e dizemos que f é contínua em a se pudermos aproximar $f(x)$ de $f(a)$ o quanto desejarmos, bastando tomar valores de x suficientemente próximos de a em X. Ou seja, na definição de continuidade temos que a única variável que aparece é x, visto que a está fixado.*

Já na Definição 7.4.1 (Continuidade Uniforme) não temos um ponto fixo e, por isso, ela nos diz que podemos tornar $f(y)$ tão próximo de $f(x)$ quanto se deseje. Para isso, basta tomar y suficientemente próximo de x, para quaisquer x e y, e, por isso, ambos x e y são variáveis.

d) *A continuidade é uma noção local, enquanto que a continuidade uniforme é uma noção global.*

De fato: *Se cada ponto $x \in X \subset \mathbb{R}$ possui uma vizinhança V tal que a restrição de f em $X \cap V$ é contínua, então, a função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua (Localidade). Porém, se em cada ponto $x \in X \subset \mathbb{R}$ possui uma vizinhança V tal que a restrição de f em $X \cap V$ é uniformemente contínua não temos a garantia que a função $f : X \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua (Veja Exemplos 7.4.1 e 7.4.2).* □

■

Vamos agora apresentar a definição de funções *Lipschitziana.*

Definição 7.4.2 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **Lipschitziana** quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$, para quaisquer $x, y \in X$. A constante k é chamada de **Constante de Lipschitz**.*

■

Teorema 7.4.1 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana se, e somente se, o quociente $\dfrac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$ é limitado, para todo $x, y \in X$.*

Demonstração: $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana $\Leftrightarrow$ $\exists\, k > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \Leftrightarrow \exists\, k > 0$ tal que $\dfrac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq k \Leftrightarrow$ o quociente $\dfrac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$ é limitado.
■

Exemplo 7.4.3 *Toda função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziana é uniformemente contínua.*

De fato: *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana, com $k > 0$ sendo a constante de Lipschitz. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$. Assim,*

$$x, y \in X \text{ e } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| < k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

e, por isso, temos que f é uniformemente contínua. □

■

Exemplo 7.4.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim, dada por $f(x) = ax + b$. Então, f é uma função lipschitziana, com constante de lipschitz dada por $k = |a|$.*

De fato:

$$|f(y) - f(x)| = |(ay + b) - (ax + b)| = |a||y - x|.$$

□

■

Exemplo 7.4.5 *A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é lipschitziana, visto que ela não é uniformemente contínua. Contudo, para todo $a > 0$, a restrição da função f ao conjunto $[a, +\infty[$ é lipschitziana.*

De fato: *Como $X = [a, +\infty[$, segue que $x, y \geq a$. Dessa forma, $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{y}$ e $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{x}$. Assim, tomando $k = \dfrac{1}{a^2}$ como sendo a constante de lipschitz, segue que*

$$|f(y) - f(x)| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|y - x|}{|xy|} \leq \frac{1}{a^2}|y - x|.$$

Portanto, f é uma função lipschitziana. □

■

Teorema 7.4.2 *A fim de que a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua é necessário e suficiente que, para todo par de sequências $(x_n), (y_n) \subset X$ com $\lim(x_n - y_n) = 0$, tenhamos $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.*

Demonstração: Se f é uniformemente contínua e $\lim(x_n - y_n) = 0$, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $|y - x| < \delta$ impliquem em $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - x_n| < \delta$ sempre que $n > n_0$. Dessa forma, temos que $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ e, por isso, $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

Reciprocamente, suponha que seja válida a condição: para todo par de sequências $(x_n), (y_n) \subset X$ com $\lim(x_n - y_n) = 0$, tenhamos $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$. Se f não fosse uniformemente contínua, existiria $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, poderíamos encontrar $x_n, y_n \in X$ tal que $|y_n - x_n| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Dessa forma, temos que $(x_n), (y_n) \subset X$, com $\lim(x_n - y_n) = 0$ mas $\lim|f(x_n) - f(y_n)| \neq 0$, o que é uma contradição com as hipóteses. Portanto, f é uniformemente contínua. ■

Exemplo 7.4.6 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua.*

De fato: *Tome $x_n = n$ e $y_n = n + \dfrac{1}{n}$. Assim, $|y_n - x_n| = \dfrac{1}{n}$ e*

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right) - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2}.$$

Dessa forma, $\lim|y_n - x_n| = 0$ *mas* $\lim|f(x_n) - f(y_n)| = 2 \neq 0$. *Portanto,* f *não é uniformemente contínua.* $\square$

$\blacksquare$

Teorema 7.4.3 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto compacto. Assim, toda função* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua é uniformemente contínua.*

Demonstração: Se f não é uniformemente contínua, então, existiriam $\epsilon > 0$ e duas sequências $(x_n), (y_n) \subset X$ tais que $\lim|y_n - x_n| = 0$ mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, como X é compacto, existe $a \in X$ tal que $x_x \to a$ (ou no mínimo uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ converge para a). Assim, como $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, segue que $y_n \to a$. Como f é contínua em a, temos que

$$\lim|f(x_n) - f(y_n)| = |f(\lim y_n) - f(\lim x_n)| = f(a) - f(a) = 0,$$

contradizendo a hipótese de que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Exemplo 7.4.7 *A função* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sqrt{x}$ *não é lipschitziana.*

De fato: *Temos que*

$$|f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{|\sqrt{y} - \sqrt{x}||\sqrt{y} + \sqrt{x}|}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} = \frac{|y - x|}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} = \frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \cdot |y - x|.$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \to +\infty, \text{ quando } x, y \to 0.$$

Portanto como o quociente $\dfrac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$ *é ilimitado, segue que* f *não é lipschitziana.* $\square$

Por outro lado, f *restrita ao conjunto* $[1, +\infty)$ *é lipschitziana e, consequentemente, uniformemente contínua, visto que no conjunto* $[1, +\infty)$ *temos que* $\sqrt{y} + \sqrt{x}| \geq 2$ *e, por isso,*

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = \frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \leq \frac{1}{2}.$$

Observe que f *restrita ao conjunto* $[0, 1]$*, mesmo não sendo lipschitziana, é uniformemente contínua, visto que* f *é contínua e* $[0, 1]$ *é compacto. Portanto,* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua.*

De fato: *Dado* $\epsilon > 0$*, existem* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tais que*

- $x, y \in [0, 1]$ *e* $|y - x| < \delta_1$ *implicam em* $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ *e*
- $x, y \in [1, +\infty)$ *e* $|y - x| < \delta_2$ *implicam em* $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. *Dessa forma, dados* $x, y \in [0, +\infty)$*, com* $|y - x| < \delta$ *temos que:*

- *se* $x, y \in [0,1]$, *então,* $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$;
- *se* $x, y \in [1, +\infty)$, *então,* $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$;
- *se* $x \in [0,1]$ *e* $y \in [1, +\infty)$, *segue que* $|y-1| < \delta$ *e* $|1-x| < \delta$. *Assim, temos que* $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(1)| + |f(1) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

□

■

Teorema 7.4.4 *Toda função uniformemente contínua num conjunto limitado* X *é uma função limitada.*

Demonstração: Suponha que f não seja limitada. Sem perda de generalidade, vamos supor que f não é limitada superiormente. Então, existe uma sequência $(x_n) \in X$ tais que $f(x_{n+1}) > f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é limitado, podemos supor que x_n é convergente, pois caso contrário ela possui uma subsequência convergente e, nesse caso, podemos tomar essa subsequência.

Então, tomando a sequência $y_n = x_{n+1}$, temos que $\lim(y_n - x_n) = 0$, mas $\lim[f(y_n) - f(x_n)] \neq 0$ e, por isso, f não é uniformemente contínua, o que é um absurdo. Portanto, f é limitada. ■

Teorema 7.4.5 *Se* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua, então, para cada* $a \in X'$ *existe* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Demonstração: Tome uma sequência fixa $(a_n) \subset (X \setminus \{a\})$, com $\lim a_n = a$. Assim, segue do Teorema 7.4.4 que a sequência $(f(a_n))$ é limitada e, por isso, ela é convergente ou possui uma subsequência convergente, digamos $\lim f(a_n) = b$. Agora, precisamos mostrar que $\lim f(x_n) = b$, para qualquer sequência $(x_n) \subset (X \setminus \{a\})$, com $\lim x_n = a$. Para isso, como $\lim(x_n - a_n) = 0$, e f é uniformemente contínua, segue que $\lim[f(x_n) - f(a_n)] = 0$ e, por isso,

$$\lim f(x_n) = \lim[f(x_n) - f(a_n) + f(a_n)] = 0 + \lim f(a_n) = b.$$

■

Exemplo 7.4.8 *a) Temos que a função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *não é uniformemente contínua, visto que* 0 *é um ponto de acumulação de* $\mathbb{R}^+$ *mas* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *não existe.*

b) Temos que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ *não é uniformemente contínua, visto que* 0 *é um ponto de acumulação de* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *mas* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *não existe.*

c) Temos que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *não é uniformemente contínua, visto que* 0 *é um ponto de acumulação de* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *mas* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *não existe.*

■