1.3 Vetores

Agora iniciaremos o estudo de um objeto extremamente importante para a matemática, que são os *Vetores*. Para isso, vamos estabelecer algumas definições, começando com grandezas *Escalares* e *Vetoriais*.

Definição 1.3.1 *Uma grandeza é chamada de Grandeza Escalar quando ela fica totalmente caracterizada por um número.*

Exemplo 1.3.1 *São exemplos de grandezas escalares: massa, pressão, temperatura, volume, tempo, o índice de refração absoluto, entre outros.*

■

Definição 1.3.2 *Uma grandeza é chamada de Grandeza Vetorial quando para ser totalmente caracterizada é necessário um número, uma direção e um sentido.*

Exemplo 1.3.2 *São exemplos de grandezas vetoriais: velocidade, aceleração, força, campo elétrico, campo magnético, entre outros.*

■

Para chegarmos a definição de *Vetores*, precisamos primeiro estabelecer o que são *Segmentos Orientados*, como apresentado a seguir.

Definição 1.3.3 *Um Segmento Orientado é determinado por um par ordenado de pontos A e B, onde primeiro ponto A é chamado de Origem e o segundo ponto B é chamado de Extremidade. Notação: $\overrightarrow{AB}$.*

Definição 1.3.4 *Um Segmento Nulo é aquele cuja extremidade coincide com a origem. Notação: $\overrightarrow{AA}$ ou $\vec{O}$.*

Observação 1.3.1 *Seja $\overrightarrow{AB}$ um segmento orientado. Dessa forma A é a sua origem e B é a sua extremidade. Consequentemente, o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ é diferente do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, visto que para o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ temos que B como sendo a origem e A a extremidade.*

Definição 1.3.5 *Seja $\overrightarrow{AB}$ um segmento orientado. Então, o segmento $\overrightarrow{BA}$ é chamado de Segmento Oposto a $\overrightarrow{AB}$.*

Exemplo 1.3.3 *Na Figura 1.11 apresenta a ilustração de um segmento de reta no Item (a), um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ no Item (b) e o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ em (c).*

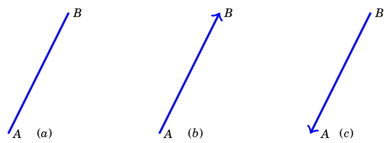


Figura 1.11: Ilustração de um segmento e um segmento orientado com o seu oposto.

■

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ pode ser associado um número real, não negativo, que será a *Norma do Segmento* em relação à unidade definida, como apresentado a seguir.

Definição 1.3.6 *A Medida, ou o Módulo, de um segmento orientado é igual ao valor da distância entre a sua origem e a sua extremidade. Notação:* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Definição 1.3.7 *Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dois segmentos orientados. Dessa forma,*

a) Dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem o mesmo Comprimento, ou o mesmo Módulo, se

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|.$$

b) Dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem a mesma Direção, ou que eles são Paralelos, se os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão sobre retas paralelas.

c) Suponha que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem a mesma direção. Então, eles terão o Mesmo Sentido se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem o mesmo sentido de crescimento. Caso contrário, eles possuem Sentidos Opostos ou Sentidos Contrários.

Observação 1.3.2 *Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dois segmentos orientados. Dessa forma,*

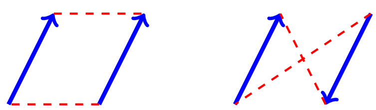
a) Só é possível comparar o sentido entre dois segmentos orientados quando eles possuem a mesma direção.

b) O módulo do segmento nulo é zero, ou seja,

$$\left\|\overrightarrow{AA}\right\| = 0.$$

c) Observe que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$, eles possuem a mesma direção, porém, eles possuem sentidos contrários.

d) Uma forma prática para verificar se dois segmentos orientados de mesma direção possuem, ou não, o mesmo sentido, é traçar um segmento ligando os seus pontos iniciais e outro ligando os seus pontos finais, como visto na Figura 1.12.



(a) (b)

Figura 1.12: Ilustração de um procedimento para verificar se dois segmentos orientados de mesma direção possuem, ou não, o mesmo sentido.

Se esses segmentos traçados não se intersectam, como ilustrado em (a) na Figura 1.12, então, os segmentos orientados possuem o mesmo sentido. Caso contrário, como ilustrado em (b) na Figura 1.12, temos que os segmentos orientados possuem sentidos contrários.

Exemplo 1.3.4 *Na Figura 1.13 temos exemplos de segmentos orientados de mesmo sentido (em* (a) *e em* (c)*) e segmentos orientados de sentido contrário (em* (b) *e em* (d)*). Além disso, em* (e) *é ilustrado um segmento com* $\left\|\overline{AB}\right\| = 5$ *u.c..*

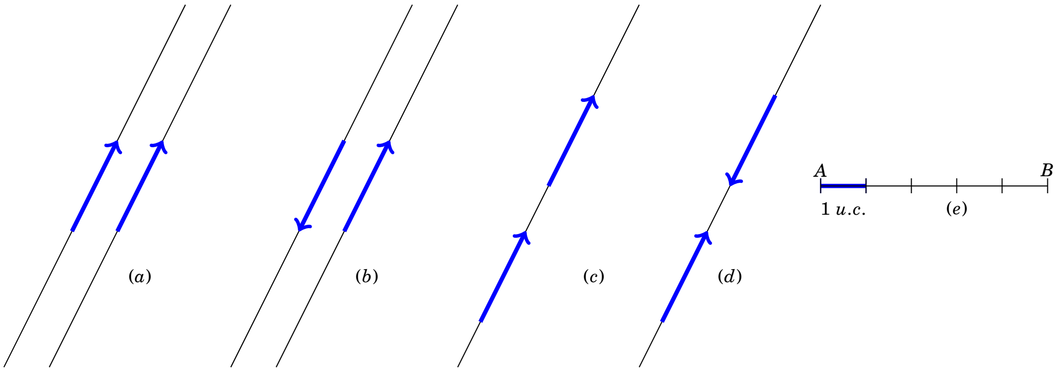


Figura 1.13: Ilustração de segmentos de retas com mesma orientação e com sentidos contrários.

■

Agora vamos apresentar a definição de segmentos *Equipolentes*. Essa definição será utilizada na de *Vetores*.

Definição 1.3.8 *Dois segmentos orientados* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *são chamados de Equipolentes quando eles são ambos nulos ou quando eles possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido. Notação:* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$

Exemplo 1.3.5 *Na Figura 1.14 temos que* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *tem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido, portanto, temos que*

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}.$$

Por outro lado, $\overrightarrow{MN}$ *e* $\overrightarrow{PQ}$ *não são equipolentes, visto que eles não tem nem o mesmo módulo e nem a mesma direção.*

Figura 1.14: Ilustração de segmentos orientados que são equipolentes e outros que não são.

■

Vamos a alguns resultados.

Proposição 1.3.1 *A relação de Equipolência é uma relação de equivalência, ou seja, para quaisquer que sejam os segmentos orientados* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{EF}$, *temos que são válidas as seguintes propriedades:*

a) Reflexiva: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.

b) Simétrica: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.

c) Transitiva: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Demonstração:

a) Temos que $\overrightarrow{AB}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$. Portanto, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$, ou seja, a relação de equipolência é uma propriedade reflexiva.

b) Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, então, $\overrightarrow{AB}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{CD}$. Consequentemente, $\overrightarrow{CD}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$ e, por isso, a relação de equipolência é uma propriedade simétrica.

c) Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, então, $\overrightarrow{AB}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{CD}$. Analogamente, se $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, então, $\overrightarrow{CD}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{EF}$. Consequentemente, $\overrightarrow{AB}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{EF}$, ou seja, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Portanto, a equipolência é uma propriedade transitiva.

Portanto, a equipolência é uma relação de equivalência. ■

Exemplo 1.3.6 *Mostre que se* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$*, então,* $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$.

Solução: Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dois segmentos orientados tais que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Dessa forma, temos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem a mesma norma, a mesma direção e o mesmo sentido, ou seja, temos que

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \text{ e que } \overline{AB} \parallel \overline{CD}.$$

Seja r a reta que contém $\overline{AB}$ e seja s a reta que contém $\overline{CD}$. Tome a projeção de A sobre s, chamando de P, e tome a projeção de B sobre s, chamando de Q, como visto na Figura 1.15.

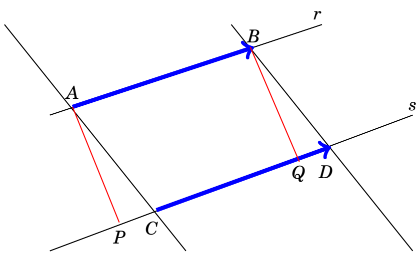


Figura 1.15: Ilustração utilizada no Exemplo 1.3.6.

Como $\overline{AP} = t = \overline{BQ}$, com t sendo a distância entre as retas r e s, segue que $ABQP$ é um retângulo e, consequentemente, $\left\|\overline{PQ}\right\| = \left\|\overline{AB}\right\|$. Assim, como

$\left\|\overrightarrow{CQ}\right\| + \left\|\overrightarrow{QD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PC}\right\| + \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|$, segue que $\left\|\overrightarrow{PC}\right\| = \left\|\overrightarrow{QD}\right\|$. Logo, do caso de congruência LAL, temos que os triângulos ACP e BDQ são congruentes e, consequentemente, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$. Portanto, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ possuem a mesma norma.

Da congruência dos triângulos ACP e BDQ, temos que os ângulos $A\hat{C}P$ e $B\hat{D}Q$ são congruentes e, consequentemente, temos que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$. Portanto, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ possuem a mesma direção.

Por fim, como o seguimento ligando os pontos A e B não intersecta o segmento ligando os pontos C e D, segue que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ possuem o mesmo sentido. Portanto, como $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ possuem a mesma norma, a mesma direção e o mesmo sentido, segue que $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$. ■

Observação 1.3.3 *a) Do Exemplo 1.3.6, podemos concluir que se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, e se eles não pertencem a mesma reta, então, $ABCD$ é um paralelogramo, visto que o quadrilátero $ABCD$ possuem os pares de lados opostos paralelos.*

b) Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

Vamos estabelecer agora a última peça do quebra-cabeça que estamos construindo para chegarmos a definição de vetores. Essa peça é a definição de *Classe de Equipolência*, que é apresentada a seguir.

Definição 1.3.9 *Dado o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, a Classe de Equipolência de $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$. O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é chamado de Representante da classe.*

Observação 1.3.4 *a) A Definição 1.3.9 pode ser reescrita, de uma maneira simples, da seguinte forma: a classe de equipolência do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto formado por todos os vetores de mesma norma, mesma direção e mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{AB}$.*

b) Por causa da propriedade reflexiva da relação de equipolência, temos que todo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ pertence a sua classe de equipolência.

c) Por causa da propriedade simétrica da relação de equipolência, temos que se $\overrightarrow{CD}$ pertence a classe de equipolência do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, então, $\overrightarrow{AB}$ pertence a classe de equipolência do segmento orientado $\overrightarrow{CD}$. Em outras palavras, se duas classes de equipolência possuem um representante comum, então, segue que elas são coincidentes.

d) De uma forma resumida, qualquer segmento orientado é o representante de uma única classe de equipolência.

De posse dos conceitos até agora estudados, podemos apresentar a definição de *Vetores*, como a seguir.

Definição 1.3.10 *Um Vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados.*

Observação 1.3.5 *a) Se $\overrightarrow{AB}$ é um segmento orientado, então, o vetor que tem $\overrightarrow{AB}$ como representante também é representado por $\overrightarrow{AB}$.*

b) Quando não se deseja usar um segmentos orientado para representar o vetor, utilizamos uma letra minúscula do alfabeto arábico com uma seta para representar o vetor como, por exemplo, $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{a}$, etc.

c) Lembre-se que um vetor $\vec{v}$ é um conjunto (uma classe de equivalência) e, por isso,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \{\overrightarrow{XY}; \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Exemplo 1.3.7 *Na Figura 1.16 são apresentadas várias representações do vetor $\overrightarrow{AB}$.*

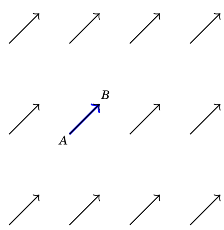


Figura 1.16: Representação de várias cópias do mesmo vetor.

■

Observação 1.3.6 *a) Todo segmento orientado define um vetor, mas um vetor representa uma infinidade de segmentos orientados, todos equipolentes entre si.*

b) Não se esqueça: todos os segmentos orientados que representam o mesmo vetor, possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

c) A notação para norma de vetores é a mesma que usamos para segmentos orientados, ou seja, o módulo de um vetor $\vec{v}$ é representado por $||\vec{v}||$.

Vamos a alguns resultados.

Proposição 1.3.2 *Seja $\vec{v}$ um vetor qualquer. Para qualquer ponto P, existe um segmento orientado representante de $\vec{v}$ com origem em P, ou seja, existe um único ponto B tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$.*

Demonstração: Primeiro vamos provar a existência. Seja $\vec{v}$ um vetor. Assim, temos que qualquer segmento orientado $\overrightarrow{RS}$ que representa $\vec{v}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$. Seja m a reta que contém o segmento $\overline{RS}$ e seja n a reta que passa por P e é paralela a reta m.

Sobre a reta n e a partir de P e no mesmo sentido do ponto S em relação ao ponto R, tome um ponto Q de forma que

$$\left|\left|\overrightarrow{PB}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{RS}\right|\right| = ||\vec{v}||.$$

Portanto, $\overrightarrow{PB}$ possui a mesma norma, a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\vec{v}$ e, por isso, $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$. Agora, provemos a unicidade. Suponha que exista um ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$. Dessa forma, temos que $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são equipolentes, visto que eles pertencem a mesma classe de equipolência. Portanto, como os segmentos $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ possuem a mesma origem e são equipolentes, segue que $B = Q$. ■

Definição 1.3.11 *O Vetor Nulo é a classe de equipolência que possui um segmento orientado nulo. Notação:* $\vec{0}$.

Em outras palavras, o vetor nulo é o conjunto formado por todos os segmentos orientados de origem e extremidades coincidentes. Agora, vamos definir os *Vetores Opostos*.

Definição 1.3.12 *Seja $\overrightarrow{AB}$ um representante do vetor $\vec{u}$. O Vetor Oposto de $\vec{u}$, denotado por $-\vec{u}$, é o vetor que tem $\overrightarrow{BA}$, ou qualquer ou segmento orientado equipolente a $\overrightarrow{BA}$, como representante. Por isso,*

$$-\vec{u} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Definição 1.3.13 *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos serem Colineares se eles tiverem a mesma direção.*

Definição 1.3.14 *Se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ possuem representantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$, respectivamente, pertencente a um mesmo plano π, então, dizemos que eles são Coplanares.*

Como um vetor é um conjunto, faz todo sentido falar em Igualdade entre Vetores, como apresentado na definição a seguir.

Definição 1.3.15 *Dois vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ são ditos serem Iguais se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*

Exemplo 1.3.8 *Na Figura 1.17, em (a) temos a ilustração de um vetor nulo. Já em (b) temos a ilustração dois vetores de mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido e, por isso, eles são iguais. Em (c) temos dois vetores de mesmo módulo, mesma direção, mas com sentidos opostos e, por essa razão temos que os dois vetores são opostos.*

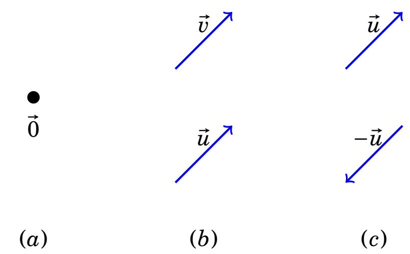


Figura 1.17: Ilustrações de vetores, vetores nulos e vetores opostos.

■

Definição 1.3.16 *Um vetor $\vec{v}$ é dito ser Unitário se ele possui norma igual a um, ou seja, se $||\vec{v}|| = 1$.*

Definição 1.3.17 *O Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.*

Observação 1.3.7 *Seja $\vec{v}$ o versor do vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$. Dessa forma, temos que $||\vec{v}|| = 1$. Dessa forma, podemos obter $\vec{v}$ a partir de $\vec{u}$, usando a seguinte relação*

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}.$$

De fato: *Observe que $||\vec{v}|| = \left|\left|\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}\right|\right|$. Assim, como $||\vec{u}||$ é um número, temos que*

$$||\vec{v}|| = \left|\left|\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}\right|\right| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{u}||} = 1.$$

Portanto, $\vec{v}$ o versor do vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$. □

Vamos agora estabelecer a definição de *Soma de Vetores*.

Definição 1.3.18 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. Então, os pontos A e C determinam um vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ que é chamado de Soma dos Vetores.*

Exemplo 1.3.9 *Na Figura 1.18 é ilustrado como proceder a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Tomando um representante $\overrightarrow{AB}$ para o vetor $\vec{u}$ e o representante $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$, segue que o vetor definido por $\overrightarrow{AC}$ é o vetor soma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.*

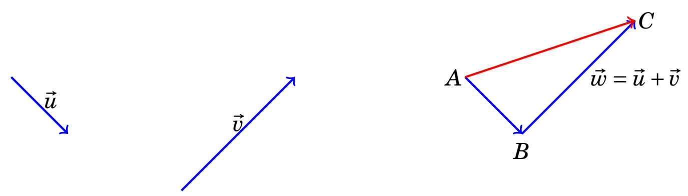


Figura 1.18: Ilustrações da operação soma de vetores.

■

Teorema 1.3.1 *A soma de vetores apresenta as seguintes propriedades: para todos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ temos que*

a) a soma é comutativa, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

b) a soma é associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

c) existe um único vetor nulo na soma de forma que para todo $\vec{v}$ temos $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$;

d) *existe um único vetor oposto a $\vec{v}$ na soma de forma que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, para todo vetor $\vec{v}$.*

Demonstração: Todas as demonstrações dessas propriedades saem das propriedades para soma de segmentos orientados e, por isso, será deixado de exercício. ■

Exemplo 1.3.10 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. Então, mostre que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.*

Solução: Observe que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Assim,

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} - (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

■

Exemplo 1.3.11 *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. Mostre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$.*

Solução: Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores. Assim, como $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ e somando o mesmo vetor $-\vec{u}$ dos dois lados da desigualdade temos que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w}) \Rightarrow (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}.$$

■

Agora vamos definir outra operação, chamada de *Produto por Escalar*.

Definição 1.3.19 *Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um escalar $k \in \mathbb{R}$, o vetor $\vec{w} = k\vec{v}$ é caracterizado por:*

- *módulo: $|k| \cdot ||\vec{v}||$;*
- *direção: a mesma de $\vec{v}$;*
- *sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se $k > 0$ e o sentido oposto de $\vec{v}$ se $k < 0$.*

Observação 1.3.8 *Sejam $\vec{v}$ vetor e $a \in \mathbb{R}$. Então, $a = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ implica em $k\vec{v} = \vec{0}$.*

Teorema 1.3.2 *Para o produto por escalar são válidas as seguintes propriedades: Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores e $a, b \in \mathbb{R}$ escalares, então,*

a) *$a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$, ou seja, produto por escalar é associativo em relação ao produto por escalar;*

b) *$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$, ou seja, no produto por escalar vale a propriedade distributiva em relação aos escalares;*

c) *$a(\vec{v} + \vec{u}) = a\vec{v} + a\vec{u}$, ou seja, no produto por escalar vale a propriedade distributiva em relação ao vetores;*

d) $1\vec{v} = \vec{v}$, *ou seja,* 1 *é o elemento neutro do produto por escalar.*

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 1.3.12 *Mostre que se* $\alpha \neq 0$ *e se* $\alpha\vec{v} = \vec{w}$*, então,* $\vec{v} = \dfrac{\vec{w}}{\alpha}$.

Solução: Sejam $\alpha \neq 0$ um escalar e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores tais que $\alpha\vec{v} = \vec{w}$. Assim,

$$\alpha\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{v}) = \frac{1}{\alpha}(\vec{w}) \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w} \Rightarrow 1\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\alpha} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{w}}{\alpha}.$$

■

Exemplo 1.3.13 *Qual a solução da equação* $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$*, na variável* $\vec{x}$.

Solução: Temos que

$$2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v}) \Leftrightarrow 10\vec{x} - 2\vec{x} = -3\vec{u} - 10\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{-(3\vec{u} + 10\vec{v})}{8}.$$

■

Exemplo 1.3.14 *Sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *vetores constantes. Então, resolva o sistema dado por*

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{x} + \vec{y} - \vec{z} & = & \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} & = & \vec{u} - \vec{v} \\ -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

Solução: Observe que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{x} + \vec{y} - \vec{z} & = & \vec{u} + \vec{v} \\ \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} & = & \vec{u} - \vec{v} \\ -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} & = & \vec{0} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\vec{x} = & 2\vec{u} & (L1 + L2) \\ 2\vec{y} = & \vec{u} + \vec{v} & (L1 + L3) \\ 2\vec{z} = & \vec{u} - \vec{v} & (L2 + L3) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{u}, \quad \vec{y} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} \text{ e } \vec{z} = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}.$$

■

Exemplo 1.3.15 *Dados os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *na Figura 1.19, encontre o vetor* $\vec{a}$ *dado por* $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \dfrac{\vec{w}}{2}$.

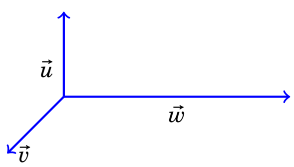


Figura 1.19: Ilustrações dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ para serem utilizados no Exercício 1.3.15.

Solução: Observe a Figura 1.20.

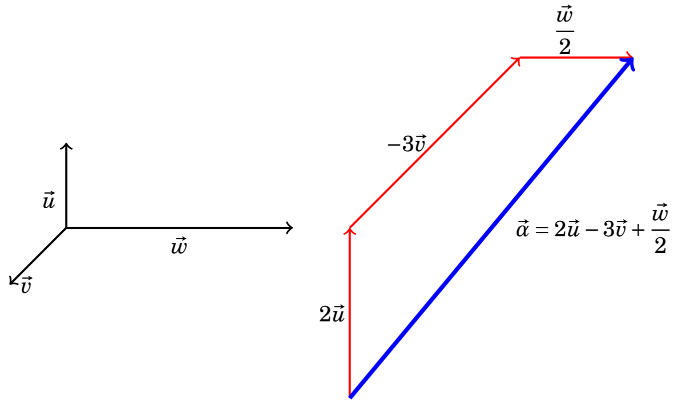


Figura 1.20: Ilustrações do vetor $\vec{\alpha} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \dfrac{\vec{w}}{2}$ solução do Exercício 1.3.15.

■

Observação 1.3.9 *Para o produto por escalar valem as seguintes propriedades: Sejam $\vec{v}$ um vetor e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, $(-\alpha)\vec{v} = \alpha(-\vec{v}) = -\alpha\vec{v}$ e $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$.*

Proposição 1.3.3 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores. Assim, temos que*

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{u} = \alpha\vec{v}.$$

Demonstração: Considere Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, não nulos, tais que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ de mesmo sentido. Tome $\alpha = \dfrac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}$. Assim, como

$$||\alpha\vec{v}|| = |\alpha|\,||\vec{v}|| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\,||\vec{v}|| = ||\vec{u}||,$$

seque que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, visto que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possui o mesmo módulo, a mesma direção e mesmo sentido. Para o caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem sentidos contrários, considere $\alpha = -\dfrac{||\vec{v}||}{||\vec{u}||}$ que o resultado sai naturalmente.

Por outro lado, se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, segue da definição de produto por escalar (Definição 1.3.19) que $\vec{u} \parallel \vec{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, o que termina a demonstração. ■

Exemplo 1.3.16 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos e paralelos. Mostre que*

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 \neq ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2.$$

Solução: Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não nulos e paralelos, segue que existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Assim,

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||(\alpha + 1)\vec{v}||^2 = (\alpha + 1)^2\,||\vec{v}||^2 = (\alpha^2 + 2\alpha + 1)\,||\vec{v}||^2.$$

Por outro lado,

$$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\alpha\vec{v}||^2 + ||\vec{v}||^2 = \alpha^2 ||\vec{v}||^2 + ||\vec{v}||^2 = (\alpha^2+1)||\vec{v}||^2.$$

Como

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow 2\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \neq \alpha^2 + 1,$$

segue que $||\vec{u}+\vec{v}||^2 \neq ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$. ■

Exemplo 1.3.17 *Sejam B e C dois pontos distintos e M o ponto médio de $\overline{BC}$. Nessas condições, mostre que se A é um ponto qualquer, então, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.*

Solução: Sejam B e C dois pontos distintos, M o ponto médio de $\overline{BC}$ e A um ponto qualquer. Observe a Figura 1.21.

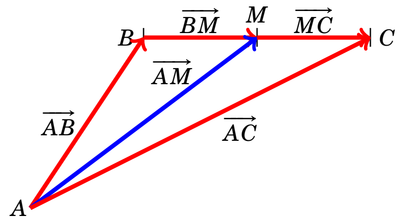


Figura 1.21: Ilustrações dos vetores para a solução do Exercício 1.3.17.

Dessa forma, podemos observar que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$. Além disso, temos que $\overline{BM} = \overline{MC} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$. Consequentemente, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$. Portanto,

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

■

Proposição 1.3.4 *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não paralelos, então,*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 = \beta.$$

Demonstração: Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não paralelos e que $\alpha \neq 0$. Como $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, segue que $\vec{u} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} \parallel \vec{v}$, o que é uma contradição. Assim, temos que $\alpha = 0$. Daí, $\beta\vec{v} = \vec{0}$ e, sendo $\vec{v} \neq 0$, temos que $\beta = 0$. Portanto, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não paralelos, então, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$. ■

Exemplo 1.3.18 *Mostre que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não paralelos, então,*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v} \Rightarrow \alpha = \gamma \text{ e } \beta = \delta.$$

Solução: Temos que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v} \Rightarrow (\alpha-\gamma)\vec{u} + (\beta-\delta)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha-\gamma) = 0 \text{ e } (\beta-\delta) = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma \text{ e } \beta = \delta.$$

■

Agora vamos estabelecer uma operação "*Híbrida*", onde será possível estabelecer a soma de um ponto com o vetor.

Definição 1.3.20 *Dados um ponto P e um vetor $\vec{u}$, o ponto Q tal que o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ seja um representante de $\vec{u}$ é chamado de Soma de P com $\vec{u}$. Notação: $P+\vec{u}$.*

Observação 1.3.10 *A Definição 1.3.20 pode ser reescrita por*

$$P + \vec{u} = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{u}.$$

Além disso, se $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, temos que $P + \overrightarrow{PQ} = Q$, ou seja, $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

Exemplo 1.3.19 *Prove que se $P = A - \vec{u}$, então, $\overrightarrow{AB} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}$, para qualquer ponto B.*

Solução: Sejam P, A e B pontos e $\vec{u}$ um vetor tal que $P = A - \vec{u}$. Assim,

$$P = A - \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = A - P \Rightarrow \vec{u} = A - B - (P - B) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{BA} + \vec{u} = -\overrightarrow{BP} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \vec{u} = \overrightarrow{PB}.$$

■

Proposição 1.3.5 *Para quaisquer que sejam os pontos A e B e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, são válidas as seguintes propriedades:*

a) $(A+\vec{u})+\vec{v} = A+(\vec{u}+\vec{v})$;

b) $A+\vec{u} = A+\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$;

c) $A+\vec{u} = B+\vec{u} \Rightarrow A = B$;

d) $(A-\vec{u})+\vec{u} = A$.

Demonstração:

a) Considere $B = A+\vec{u}$ e $C = B+\vec{v}$. Assim,

$$(A+\vec{u})+\vec{v} = B+\vec{v} = C.$$

Por outro lado,

$$A+(\vec{u}+\vec{v}) = A+(B-A+\vec{v}) = B+\vec{v} = C$$

e, por isso, temos que $(A+\vec{u})+\vec{v} = A+(\vec{u}+\vec{v})$.

b) Sendo $P = A+\vec{u}$ e $P = A+\vec{v}$, então, $\vec{u} = P-A = \vec{v}$ e, consequentemente, $\vec{u} = \vec{v}$.

c) Temos que

$$A+\vec{u}=B+\vec{u}\Rightarrow(A+\vec{u})-\vec{u}=(B+\vec{u})-\vec{u}\Rightarrow A+(\vec{u}-\vec{u})=B+(\vec{u}-\vec{u})\Rightarrow A=B.$$

d) Temos que

$$(A-\vec{u})+\vec{u}=A+(-\vec{u}+\vec{u})=A+\vec{0}=A.$$

■

Exemplo 1.3.20 *Dados os pontos A,B e C, determine o ponto X sabendo que $(A+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{CX}=C+\overrightarrow{CB}$.*

Solução: Temos que

$$(A+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{CX}=A+(B-A)+(X-C)=X+(B-C)=X+\overrightarrow{BC}.$$

Assim,

$$(A+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{CX}=C+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow X+\overrightarrow{BC}=C+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow X=C+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X=C+(B-C)-\overrightarrow{BC}=\Leftrightarrow X=B+\overrightarrow{CB}.$$

■

Exemplo 1.3.21 *Prove que $B=A+\overrightarrow{DC}\Rightarrow B=C+\overrightarrow{DA}$.*

Solução: Temos que

$$B=A+\overrightarrow{DC}\Rightarrow B=A+(C-D)\Rightarrow B=C+(A-D)\Rightarrow B=C+\overrightarrow{DA}.$$

■

Exemplo 1.3.22 *Determine $\overrightarrow{BA}$ em função de $\vec{u}$ sabendo que $A-\vec{u}=B+\vec{u}$.*

Solução: Como $A-\vec{u}=B+\vec{u}$, segue que

$$A-\vec{u}=B+\vec{u}\Rightarrow B-A=-\vec{u}-\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-2\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=2\vec{u}.$$

■

Definição 1.3.21 *Dizemos que um ponto P divide um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, na razão r, se $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{PB}$.*

Observação 1.3.11 *Se $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{PB}$, com $P\neq B$, então, P pertence a reta que contém $\overrightarrow{AB}$ e, além disso, $r=\pm\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PB}\right\|}$.*

De fato: *Como $P\neq B$, segue que $\overrightarrow{PB}\neq\vec{0}$ e, consequentemente, $\left\|\overrightarrow{PB}\right\|\neq 0$. Além disso,*

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=\left\|r\overrightarrow{PB}\right\|\Rightarrow|r|\left\|\overrightarrow{PB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\Rightarrow|r|=\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PB}\right\|}\Rightarrow r=\pm\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PB}\right\|}.$$

□

Exemplo 1.3.23 *Seja r a razão em que o ponto P divide o segmento orientado não nulo $\overrightarrow{AB}$. Prove que $r \neq -1$ e que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{r}{r+1}\overrightarrow{AB}$.*

Solução: Se $r \neq -1$, segue que $\overrightarrow{AP} \neq -\overrightarrow{PB}$. Daí,

$$\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = r(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} - r\overrightarrow{PA} = r\overrightarrow{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + r\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AB} \Rightarrow\Rightarrow (1+r)\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \left(\frac{r}{r+1}\right)\overrightarrow{AB}.$$

■

Exemplo 1.3.24 *Sejam A, B e C pontos distintos. Seja X o ponto tal que $\overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AB}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e p.*

Solução: Temos que

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{CA} + \left(p\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CA} + p\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \overrightarrow{CA} - p\overrightarrow{CA} + p\overrightarrow{CB} = (1-p)\overrightarrow{CA} + p\overrightarrow{CB}.$$

■

Exemplo 1.3.25 *Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.*

Solução: Sejam $ABCD$ um paralelogramo e M o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, como apresentado na Figura 1.21.

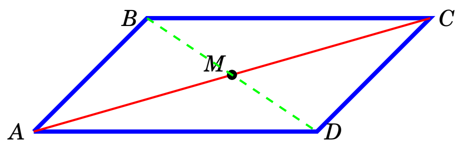


Figura 1.22: Ilustração do paralelogramo $ABCD$ usado no Exercício 1.3.25.

Dessa forma, se $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, temos que as retas que contém $\overline{BM}$ e $\overline{MD}$ são paralelas e, sendo M um ponto comum a essa reta, segue que $\overline{BD}$ é um segmento de reta e, consequentemente, M é o ponto médio de $\overline{BD}$.

Observe que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ e que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$. Assim,

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD}.$$

Portanto, como $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, segue que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio. ■

Definição 1.3.22 *O Baricentro dos pontos A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n é o ponto G que satisfaz a relação*

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Exemplo 1.3.26 *Prove que dado um ponto O qualquer, o baricentro G dos pontos A_1, A_2 e A_3 pode ser reescrito por*

$$G = O + \frac{\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)}{3}.$$

Solução: Seja G o baricentro dos pontos A_1, A_2 e A_3 e O um ponto qualquer. Assim, temos que

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} = \vec{0} \Rightarrow \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_3}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GO} + \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right) = \vec{0} \Rightarrow 3(O - G) + \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3G = 3O + \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right) \Rightarrow G = O + \frac{\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)}{3}.$$

■

Agora, faça alguns exercícios para fixar o aprendizado. Bons estudos.

1.4 Exercícios

Exercício 1.4.1 *Mostre que se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, então, $\overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{DC}$.*

Exercício 1.4.2 *Dado um vetor $\vec{u}$, não nulo, obtenha um vetor $\vec{v}$ de norma 6, tal que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tenham a mesma direção e sentidos opostos.*

Exercício 1.4.3 *Mostre que se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, então, $\overrightarrow{CA} \sim \overrightarrow{DB}$.*

Exercício 1.4.4 *Mostre que se $\vec{v}$ é um vetor, então, vale que $-(-\vec{v}) = \vec{v}$. e que $\vec{v} = -\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = 0$.*

Exercício 1.4.5 *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores de mesmo sentido e se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também tem o mesmo sentido, então, mostre que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ tem o mesmo sentido.*

Exercício 1.4.6 *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores de sentidos opostos e se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também tem sentidos opostos, então, mostre que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ tem o mesmo sentido.*

Exercício 1.4.7 *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores de mesmo sentido e se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tem sentidos opostos, então, mostre que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ tem sentidos opostos.*

Exercício 1.4.8 *Seja $\vec{u}$ um vetor. Então, prove que*

1. $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow ||\vec{u}|| > 0$;
2. $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow ||\vec{u}|| = 0$;
3. $||-\vec{u}|| = ||\vec{u}||$.

Exercício 1.4.9 *Mostre que se $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, então, $\vec{b} = \dfrac{\vec{a} - \vec{c}}{2}$.*

Exercício 1.4.10 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores constantes. Então, resolva o sistema dado por*

$$S : \begin{cases} \vec{x}+\vec{y}-\vec{z} &= \vec{u}+\vec{v} \\ \vec{x}-\vec{y}+\vec{z} &= \vec{u}-\vec{v} \\ -\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} &= \vec{0} \end{cases}.$$

Exercício 1.4.11 *Utilize os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, dados pela Figura 1.23, para encontrar o que se pede em cada um dos itens a seguir.*

a) $\vec{u}-\vec{v}$;

b) $\vec{u}-\vec{w}$;

c) $\vec{v}-\vec{u}$;

d) $\vec{w}-\vec{u}$;

e) $\vec{w}-\vec{v}$;

f) $\vec{v}-\vec{w}$;

g) $2\vec{u}-3\vec{v}$;

h) $-4\vec{w}-3\vec{u}$;

i) $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$;

j) $\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$;

k) $2\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w}$;

l) $3\vec{u}-2\vec{v}-2\vec{w}$;

m) $\vec{u}-\frac{\vec{v}}{2}+\frac{\vec{w}}{3}$;

n) $-2\vec{u}-2\vec{v}-2\vec{w}$;

o) $3\vec{u}+3\vec{v}+3\vec{w}$;

p) $-4\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}$.

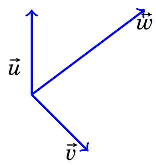


Figura 1.23: Ilustração utilizada no Exercício 1.4.11.

Exercício 1.4.12 *Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade da sua medida.*

Exercício 1.4.13 *Sejam $OABC$ um tetraedro e X o ponto definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e m.*

Exercício 1.4.14 *Seja $ABCDEF$ um hexágono regular, de centro O. Mostre que*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$

Exercício 1.4.15 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores constantes. Existe solução para o sistema*

$$S : \begin{cases} 2\vec{x}+4\vec{y}-\vec{z} &= 2\vec{u}+3\vec{v} \\ \vec{x}-\vec{y}+\vec{z} &= 3\vec{u}-2\vec{v} \\ -\vec{x}-2\vec{y}+3\vec{z} &= \vec{0} \end{cases} ?$$

Justifique a sua resposta.

Exercício 1.4.16 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores constantes. Então, resolva o sistema dado por*

$$S : \begin{cases} 2\vec{x}+3\vec{y}-3\vec{z} &= 3\vec{u}+4\vec{v} \\ 3\vec{x}-2\vec{y}+\vec{z} &= 3\vec{u}-2\vec{v} \\ -\vec{x}+4\vec{y}-2\vec{z} &= 2\vec{u}-\vec{v} \end{cases}.$$

Exercício 1.4.17 *Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O. Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vértices de $ABCDEF$ e como extremidade o centro O.*

Exercício 1.4.18 *Os pontos A,B,C e D são tais que $A \neq B$, $C \neq D$ e as retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não são paralelas. Mostre que*

$$\alpha\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{CD} \Rightarrow \alpha = 0 = \beta.$$

Exercício 1.4.19 *Dados os pontos distintos A e B, seja $X = A + \alpha\overrightarrow{AB}$. Em cada um dos casos a seguir, descreva o conjunto de valores que α deve assumir de forma que X percorra todo o conjunto especificado.*

a) O segmento de reta $\overline{AB}$.

b) A semirreta S_{AB}.

c) A semirreta S_{BA}.

d) A reta que contém $\overline{AB}$.

e) O segmento $\overline{CB}$ que possui A como ponto médio.

Exercício 1.4.20 *Sejam M, N e P os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente, do triângulo ABC. Assim,*

1. *Exprima $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.*

2. *Prove que as retas suportes e duas medianas quaisquer do triângulo são concorrentes.*

3. *Prove que as três medianas tem um único ponto comum, que divide $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$ na razão 2. (Observação: esse ponto de encontro das medianas é chamado de Baricentro do triângulo ABC.)*