1.2 Conjuntos Finitos

Vamos continuar a usar a definição de I_n como sendo o conjunto formado por todos os números naturais menores do que ou igual a n, ou seja,

$$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Além disso, observe que até agora o conjunto dos números naturais surgiu apenas como um conjunto *Ordinal*, ou seja, ele apenas nos indica a ordem que cada elemento ocupa na fila. Assim, sabemos que o 1 é o primeiro elemento, o 2 é o segundo, e assim por diante. Vamos agora estabelecer uma relação quantidade para um conjunto, ou seja, uma *Contagem* para os elementos desse conjunto. Comecemos estabelecendo a definição de *Conjuntos Finitos.*

Definição 1.2.1 *Um conjunto X é chamado de Finito quando ele é vazio ou quando existe um número natural n e uma bijeção $f : I_n \to X$.*

Observação 1.2.1 *Considerando que $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $\cdots$, $x_n = f(n)$, então, podemos reescrever $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Assim, a bijeção f é dita ser uma Contagem dos elementos de X e o número n é chamado de o Número de Elementos (ou o Cardinal) do conjunto finito X. Além disso, se um conjunto X é vazio, então, dizemos que eles tem Zero elementos.*

Dessa forma, estabelecemos uma relação de contagem para o conjunto dos números naturais, ou seja, relacionado cada posição com a quantidade dos elementos. Porém, essa contagem só vale para conjuntos finitos. Agora vamos apresentar um Lema que nos permitirá estabelecer uma bijeção com um ponto pré-fixado.

Lema 1.2.1 *Se existe uma bijeção $f : X \to Y$, então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \to Y$ tal que $g(a) = b$.*

Demonstração: Seja $a \in X$ e $b \in Y$. Se $f(a) = b$, então, f é a bijeção procurada (tome $g \equiv f$). Agora, suponha que $f(a) \neq b$. Então, como f é uma jijeção, temos que existe $b' \in Y$ tal que $b' = f(a)$. Analogamente, como f é uma bijeção, existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$. Dessa forma, defina a nova função $g : X \to Y$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} g(a) = b, \\ g(a') = b', \\ g(x) = f(x), \quad se \quad x \neq a \quad e \quad x \neq a' \end{cases}.$$

Afirmação: A função g definida é uma bijeção de X em Y.
De fato: $\vdash$: g é injetiva: Temos que

$$g(x) = g(y) \Rightarrow \begin{cases} x = a = y, \\ x = a' = y, \\ f(x) = g(x) = g(y) = f(y) \end{cases} \Rightarrow x = y,$$

visto que f é uma bijeção e, consequentemente, $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$. Portanto g é injetiva.

$\vdash$: g é sobrejetiva: Para todo $m \in Y$ temos que:

- se $m = b$, então, existe $a \in X$ tal que $g(a) = m$;
- se $m = b'$, então, existe $a' \in X$ tal que $g(a') = m$;
- se $m \neq b$ e se $m \neq b$, então, existe $x \in X$ tal que $f(x) = m$, já que f é bijeção e como $g(x) = f(x)$ quando $m \neq b$ e $m \neq b'$, segue que existe $a \in Y$ tal que $g(a) = m$.

Portanto g é sobrejetiva. $\square$

Consequentemente, como g é injetiva e sobrejetiva ao mesmo temo, temos que g é uma bijeção, o que termina a demonstração do resultado. $\blacksquare$

Teorema 1.2.1 *Se A é um subconjunto próprio de I_n, então, não existe uma bijeção $f : A \to I_n$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que uma tal bijeção f seja possível. Dessa forma, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ como sendo o menor número natural para o qual exista um subconjunto próprio $A \subset I_{n_o}$ com uma bijeção $f : A \to I_{n_o}$.

Considere que $n_0 \in A$. Então, pelo Lema 1.2.1 existe uma bijeção $g : A \to I_{n_o}$ tal que $g(n_0) = n_0$. Nesse caso, tomando a restrição

$$g : A \setminus \{n_0\} \to I_{n_o - 1},$$

temos que g é ainda uma bijeção de um subconjunto próprio $A \setminus \{n_0\}$ do conjunto I_{n_o-1} e isso gera um absurdo, visto que n_0 é o menor número natural que permite existir tal bijeção. Consequentemente, temos que $n_0 \notin A$.

Novamente, como f é uma bijeção, existe $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. Assim, pelo Lema 1.2.1, temos que existe uma bijeção $h : A \to I_{n_o}$ tal que $h(a) = n_0$. Daí, considere a restrição

$$h : A \setminus \{a\} \to I_{n_o - 1}.$$

Assim, temos que h é ainda uma bijeção de um subconjunto próprio $A \setminus \{a\} \subset I_n$ do conjunto I_{n_o-1} e, novamente, chegamos a um absurdo, pela minimalidade de n_0. Portanto, não é possível existir tal bijeção. $\blacksquare$

De uma maneira simples, esse teorema nos diz que não existe uma bijeção entre os elementos de dois conjuntos finitos que possuem números de elementos diferentes. Vamos agora a algumas consequência desse teorema.

Corolário 1.2.1 *Se $f : I_n \to X$ e $g : I_m \to X$ são bijeções, então, $n = m$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $n \neq m$. Logo, se $n < m$, então, I_n é um subconjunto próprio de I_m. Observe o diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "f"'] & I_m \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Tomando a função $h_1 : I_n \to I_m$, dada por $h_1(x) = g^{-1} \circ f(x)$, teríamos uma bijeção, já que h_1 é a composição de bijeções. Então, teríamos um absurdo, pois nesse caso teríamos uma bijeção de um conjunto com uma parte própria sua, contrariando o Teorema 1.2.1. Portanto, $n \geq m$.

Agora, Observe o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} I_m \arrow[r, "h_2"] \arrow[dr, "g"'] & I_n \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Se $n > m$, segue que I_m é um subconjunto próprio de I_n. Então, tomando a função $h_2 : I_m \to I_n$, dada por $h_2(x) = f^{-1} \circ g(x)$, teríamos uma bijeção de um conjunto com uma parte própria sua, contrariando o Teorema 1.2.1. Portanto $n = m$. ■

O Corolário 1.2.1 garante que não importa a forma que se faça a contagem dos elementos de um conjunto finito, pois sempre se chegará ao mesmo número de elementos, fato esse desejado e esperado.

Corolário 1.2.2 *Seja X um conjunto finito. Então, uma aplicação $f : X \to X$ é injetiva se, e somente se, $f : X \to X$ é sobrejetiva.*

Demonstração: Como X é finito, existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, considere o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & I_n \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

A aplicação $f : X \to X$ é injetiva (ou sobrejetiva) se, e somente se, a aplicação $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : I_n \to I_n$ é injetiva (ou sobrejetiva). Com isso, podemos provar o Teorema considerando $X = I_n$, ou seja, para $f : I_n \to I_n$.

Dessa forma, suponha que f seja injetiva. Assim, considerando $A = f(I_n)$, temos uma bijeção $f^{-1} : A \to I_n$. Logo, pelo Teorema 1.2.1, temos que $A = I_n$ e, por isso, f é sobrejetiva.

Reciprocamente, suponha que f seja sobrejetiva. Construa o conjunto $A \subset I_n$ escolhendo, para cada $y \in I_n$, um único elemento $x \in I_n$ tal que $f(x) = y$. Dessa forma, a restrição de f no conjunto A, ou seja, $f : A \to I_n$ é uma bijeção e, por isso, para cada $y \in I_n$ existe um único x tal que $f(x) = y$. Logo, pelo Teorema 1.2.1, temos que $A = I_n$ e, consequentemente, f é injetiva. ■

Em outras palavras o Corolário 1.2.2 garante que uma função $f : X \to X$, com X finito, ser injetiva (ou sobrejetiva) é uma condição necessária, e suficiente, para que seja uma bijeção.

Corolário 1.2.3 *Não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria sua.*

Demonstração: Considere $A \subsetneq X$. Suponha que exista uma bijeção $f : A \to X$. Como X é finito, existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$. Analisando o diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[dl, "\varphi"] \\ I_n & \end{tikzcd}$$

temos que $h = \varphi \circ f : A \to I_n$ é uma bijeção (composição de bijeções). Logo, do Teorema 1.2.1, segue que A e X tem n elementos, o que é um absurdo, pois o número de elementos de A é menor do que o número de elementos de X. ■

Teorema 1.2.2 *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração: Façamos a demonstração dessa propriedade por indução. Para isso, provemos que se X é finito, então, $X \setminus \{a_1\}$ $(a_1 \in X)$ também é finito.

Como X é finito, existe uma bijeção $f : I_n \to X$. Do Lema 1.2.1 sabe-se que podemos considerar que $f(n) = a_1$. Dessa forma, se $n = 1$, então, $X \setminus \{a_1\} = \varnothing$, que é finito. Caso contrário, a restrição de f ao conjunto $X \setminus \{a_1\}$, ou seja, $f : I_{n-1} \to X \setminus \{a_1\}$ é ainda uma bijeção e, consequentemente, $X \setminus \{a_1\}$ é um conjunto finito, com $n - 1$ elementos.

Agora suponha que o teorema seja válido para n elementos, ou seja, que $X \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ é finito quando X é finito. Considere agora um conjunto com $n + 1$ elementos, ou seja, $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$. Como $[X \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}] \subset [X \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}]$, e o segundo é finito, segue da primeira parte da demonstração que $X \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ é finito.

Consequentemente, como a propriedade vale para a retirada de um elemento e supondo que a propriedade vale quando retiramos n elementos ela continua sendo válida quando retiramos $n + 1$ elementos, segue do *P.I.F.* que $X \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ é finito, para todo $n \in \mathbb{N}$, quando X é finito.

Portanto, todo subconjunto de um conjunto finito é finito. ■

Esse último resultado nos diz que se X é finito, então, todos os seus subconjuntos próprios tem menos elemento do que o número de elementos de X. Ele também nos leva a uma consequência interessante, apresentada a seguir.

Corolário 1.2.4 *Dada uma função $f : X \to Y$, então, temos que:*

a) Se Y é finito e f é injetiva, então, X é finito.

b) Se X é finito e f é sobrejetiva, então, Y é finito.

Demonstração:

a) Considere $f(X) \subset Y$ o conjunto imagem da função $f : X \to Y$. Dessa forma, como $f(X) \subset Y$, segue do Teorema 1.2.2 que $f(X)$ é finito. Consequentemente, existe $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \to f(X)$.

Por outro lado, como f é injetiva, temos que a aplicação $f : X \to f(X)$ é uma bijeção. Observe o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & I_n \arrow[l, "h=f^{-1}\circ\varphi"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\ f(X) & \end{tikzcd}$$

Assim, temos que a aplicação $h = f^{-1} \circ \varphi : I_n \to X$ é uma bijeção, visto que ela é a composição de bijeções. Portanto, temos que X é um conjunto finito.

b) Agora, suponha que f seja sobrejetiva. Então, para todo $y \in Y$, existe um $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Considere a aplicação $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$, para todo $y \in Y$. Assim, temos que g é injetiva e como X é finito, segue de (a) que Y é finito.

■

O Corolário 1.2.4 pode ser reescrito da seguinte forma: se todo elemento de um conjunto X é levado por uma função f a elementos distintos de um conjunto finito Y, então, X é um conjunto finito. Ainda, se todos os elementos de um conjunto Y são a imagem dos elementos de um conjunto finito X, quando aplicados a uma função f, então, Y é finito. Agota, vamos a definição de conjunto *Limitado*.

Definição 1.2.2 *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é chamado de Limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$, $\forall\ x \in X$.*

Corolário 1.2.5 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, $X \subset \mathbb{N}$ é limitado.*

Demonstração: Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um conjunto finito. Considere $p = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Assim, para todo $x \in X$ temos que $x \leq p$ e, por isso, X é limitado. Reciprocamente, como $X \subset \mathbb{N}$ é limitado, ou seja, $x \leq p$, para todo $x \in X$, segue que $X \subset I_p$ e, pelo Teorema 1.2.2, segue que X é finito. ■

O Corolário 1.2.5 nos diz que no conjunto dos números naturais, dizer que um conjunto é finito é equivalente a dizer que ele é limitado. Para conjuntos gerais isso não é verdade, como veremos nas próximas seções. Agora, faça alguns exercícios.