1.21 Derivadas Parciais de Ordem Superior de Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, segue que, em geral, as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

também são funções reais de n variáveis reais. Assim, se as derivadas parciais dessas funções existem, temos as chamadas *Derivadas Parciais Segundas* de f.

Observação 1.21.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis x e y. Então, existem quatro derivadas de segunda ordem de f, que são:*

- *Derivada segunda de f duas vezes em relação a x:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right),$$

- *Derivada segunda de f primeiro em relação a x depois em relação a y:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right),$$

- *Derivada segunda de f primeiro em relação a y depois em relação a x:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right),$$

- *Derivada segunda de f duas vezes em relação a y:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

■

Observação 1.21.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Então,*

a) Algumas das notações que utilizamos para representar as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$D_2(D_1 f) = D_{12} f = f_{12} = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Para esse exemplo, todas as notações representam a mesma derivada de segunda ordem, ou seja, elas correspondem a derivada segunda de f derivando primeiro parcialmente em relação a x e em seguida derivando parcialmente em relação a y.

b) Lembre-se: na notação com sub-índices, a ordem da diferenciação parcial aparece da esquerda para a direita. Por outro lado, na notação envolvendo ∂ a ordem aparece da direita para a esquerda.

c) As funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ são chamadas de as Derivadas Parciais Primeiras de f.

$\blacksquare$

As definições da derivada parcial de segunda ordem para uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, são similares as definições de derivadas parciais de primeira ordem. A seguir ilustraremos uma dessas definições. As outras podem ser obtidas de maneira semelhante e, por isso, não serão repetidas.

Definição 1.21.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. A Derivada Parcial de Segunda Ordem de f, derivando primeiro em relação a x e depois em relação a y, denotada por f_{xy}, é a nova função definida por*

$$f_{xy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y},$$

se esse limite existir.

$\blacksquare$

Podemos obter as derivadas parciais de terceira ordem, quarta ordem, etc., de maneira análoga ao caso de segunda ordem. Por exemplo, as derivadas de terceira ordem são obtidas derivando parcialmente as derivadas parciais de segunda ordem e assim por diante. Alem disso, as notações para as derivadas parciais de qualquer ordem são similares às notações de segunda ordem. Por exemplo,

$$D_{112}f = f_{112}f = f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

representam a derivada parcial de terceira ordem da função f, que é obtida derivando primeiro duas vezes em relação a x e depois derivando em relação a y. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.21.1 *Dada a função $f(x, y) = e^x \mathrm{sen}(y) + \ln(xy)$, encontre:*

a) $f_{xx}(x, y)$; *b)* $f_{xy}(x, y)$; *c)* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

Solução:

a) Observe que precisamos da derivada parcial primeira em relação a x. Assim, como

$$f_x(x, y) = e^x \mathrm{sen}(y) + \frac{1}{x},$$

segue que

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x, y)) = e^x \mathrm{sen}(y) - \frac{1}{x^2}.$$

b) Usando a derivada parcial primeira em relação a x calculada anteriormente, teremos que

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x,y)) = e^x \cos(y).$$

c) Por fim, como é preciso derivar primeiro em relação a y duas vezes e depois em relação a x. Assim, temos que

$$f_y(x,y) = e^x \cos(y) + \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{yy}(x,y) = -e^x \mathrm{sen}(y) - \frac{1}{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{yyx}(x,y) = -e^x \mathrm{sen}(y).$$

■

Exemplo 1.21.2 *Sendo $f(x,y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3$, encontre todas as derivadas parciais de segunda ordem da função f.*

Solução: Temos que as derivadas de primeira ordem de f são:

$$f_x(x,y) = 20x^4y^4 - 12xy \text{ e } f_y(x,y) = 16x^5y^3 - 6x^2.$$

Daí, as derivadas de segunda ordem ficam dadas por

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^3y^4 - 12y,$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(20x^4y^4 - 12xy) = 80x^4y^3 - 12x,$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(16x^5y^3 - 6x^2) = 80x^4y^3 - 12x \text{ e}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(16x^5y^3 - 6x^2) = 48x^5y^2.$$

■

Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função, então, podem haver até n^2 derivadas parciais de segunda ordem de f num ponto $A \in D$. Por exemplo, para uma função de três variáveis (digamos, x, y e z), se todas as derivadas parciais segundas existem, então, teremos as seguintes funções:

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy} \text{ e } f_{zz}.$$

Exemplo 1.21.3 *Dada a função $f(x,y,z) = sen(xy+2z)$, encontre $f_{xzy}(x,y,z)$.*

Solução: Temos que derivar parcialmente primeiro em relação a x, depois em relação a z e, por fim, em relação a y. Assim, temos que

$$f_x(x,y,z) = y\cos(xy+2z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{xz}(x,y,z) = -2ysen(xy+2z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_{xzy}(x,y,z) = -2sen(xy+2z) - 2xy\cos(xy+2z).$$

■

Para os próximos exemplos, estaremos interessados nas derivadas mistas. Precisamos verificar se a ordem de derivação é, ou não, importante no processo.

Exemplo 1.21.4 *Dada a função $f(x,y) = x^3y - y\cosh(xy)$, encontre:*

a) $f_{xy}(x,y)$*;* *b)* $f_{yx}(x,y)$.

Solução:

a) Derivando primeiro em relação a x, temos que $f_x(x,y) = 3x^2y - y^2\text{senh}(xy)$. Daí, derivando em relação a y chegamos a

$$f_{xy}(x,y) = 3x^2 - 2y\text{senh}(xy) - xy^2\cosh(xy).$$

b) Derivando primeiro em relação a y, temos que $f_y(x,y) = x^3 - \cosh(xy) - xysenh(xy)$. Daí, derivando em relação a x chegamos a

$$f_{yx}(x,y) = 3x^2 - y\text{senh}(xy) - y\text{senh}(xy) - xy^2\cosh(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = 3x^2 - 2y\text{senh}(xy) - xy^2\cosh(xy).$$

Portanto, para esse caso, temos que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ■

O que foi observado no Exemplo 1.21.4 nem sempre é verdade, isto é, as derivadas parciais "mistas" f_{xy} e f_{yx} nem sempre serão iguais, como veremos nos próximos exemplos.

Exemplo 1.21.5 *Seja f a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais de segunda ordem $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

Solução: Do Exemplo 1.9.7, temos que

$$f_x(0,y) = -y, \text{ para todo } y \text{ e } f_y(x,0) = x, \text{ para todo } x.$$

Assim, temos que

$$f_{xy}(0,0) = -1 \text{ e } f_{yx}(0,0) = 1.$$

Portanto $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. ■

Exemplo 1.21.6 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Mostre que $f_{xy}(0,0) = 1$ e $f_{yx}(0,0) = 0$.

Solução: Observe que se $(x,y) \neq (0,0)$, então, temos que

$$f_x(x,y) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}(xy^3)[x^2+y^2] - [xy^3]\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

e para $(x,y) = (0,0)$ temos que

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

Portanto, temos que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Como $f_{xy}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)$, segue que

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{y-0}{y} = 1.$$

Por outro lado, temos que

$$f_y(x,y) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}(xy^3)[x^2+y^2] - [xy^3]\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

e para $(x,y) = (0,0)$ temos que

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Portanto, temos que

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Como $f_{yx}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$, segue que

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

■

Como já mencionado, as derivadas segundas mistas de uma função podem não ser iguais (como visto nos Exemplos e 1.21.5 e 1.21.6). Agora vamos apresentar condições que garantam a igualdade das derivadas mistas de uma função. Essas condições são apresentadas a seguir, sendo elas dadas no Teorema de *Schwarz* (ou Teorema de *Clairaut*). Primeiro, vamos a uma definição.

Definição 1.21.2 *Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser de **Classe** C^k numa bola $B(A, r) \subset D$, se f admitir todas as derivadas parciais até a ordem k contínuas em $B(A, r)$.*

■

Agora, vamos ao teorema que nos garante a igualdade das derivadas parciais mistas.

Teorema 1.21.1 ***(Teorema de Schwarz ou Teorema de Clairaut):*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 numa bola $B(A, r) \subset D$. Assim, se $A \in B(A, r)$, então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Exemplo 1.21.7 *Encontre as derivadas parciais segundas da função $f(x, y) = x^3y^2 - \ln(xy) + \cos(2x + 3y)$.*

Solução: Temos que f é contínua em todos os elementos do seu domínio, visto que f é a soma de funções contínuas. Além disso,

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - \frac{1}{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \text{sen}(2x + 3y)\frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y) =$$

$$= 3x^2y^2 - \frac{1}{x} - 2\text{sen}(2x + 3y) \text{ e}$$

$$f_y(x, y) = 2x^3y - \frac{1}{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \text{sen}(2x + 3y)\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y) =$$

$$= 2x^3y - \frac{1}{y} - 3\text{sen}(2x + 3y),$$

que são ambas contínuas em D_f. Daí, como

$$f_{xx}(x, y) = 6xy^2 + \frac{1}{x^2} - 6\cos(2x + 3y),$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x^3 + \frac{1}{y^2} - 6\cos(2x + 3y) \text{ e}$$

$$f_{yx}(x, y) = 6x^2y - 6\cos(2x + 3y)$$

são todas contínuas em D_f, segue que

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6x^2y - 6\cos(2x+3y).$$

■

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Do Teorema 1.21.1 temos que se f for de Classe C^3, então, a ordem de cálculo das derivadas mistas pode ser invertida, sem que o resultado se altere. Por isso, temos que

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} \text{ e } f_{xyy} = f_{yyx} = f_{yxy}.$$

Para as derivadas de quarta ordem, se f for de classe C^4, então,

- três derivadas em x e uma em y:

$$f_{xxxy} = f_{xxyx} = f_{xyxx} = f_{yxxx};$$

- duas derivadas em x e duas em y:

$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{yxxy} = f_{yxyx} = f_{yyxx} = f_{xyyx};$$

- uma derivada em x e três em y:

$$f_{xyyy} = f_{yxyy} = f_{yyxy} = f_{yyyx}.$$

e assim por diante. Em outras palavras, aplicando o Teorema de Schwarz repetida vezes numa função de classe C^k temos que todas as suas derivadas parciais mistas, com o mesmo número de derivadas parciais em cada uma de suas variáveis, até a ordem k, são todas iguais.

Vamos agora construir uma ideia para obter a derivada de ordem superior de uma função com duas variáveis, que esteja definida implicitamente. Sejam

$$z = f(x,y), \; x = x(t) \text{ e } y = y(t)$$

funções diferenciáveis. Assim, pela regra da cadeia temos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funções diferenciáveis, temos que

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right).$$

Assim, da regra da cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{dy}{dt}.$$

Analogamente, temos que

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right).$$

Novamente, da regra da cadeia temos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \nabla\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{dy}{dt}.$$

Dessa forma, conhecendo $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ e $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$, podemos encontrar a derivada segunda de z. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.21.8 *Suponha que $f = f(x,y)$ seja de classe C^2 num aberto $D\subset\mathbb{R}^2$. Considere $g(t) = f(3t, 2t+1)$. Expresse $g''(t)$ em função das derivadas parciais de f.*

Solução: Considere $g(t) = f(x,y)$, onde $x(t) = 3t$ e $y(t) = 2t+1$. Dessa forma, temos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Assim,

$$g''(t) = 3\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] + 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right].$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\frac{dy}{dt} = 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \text{ e}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{dy}{dt} = 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),$$

e sendo f é de classe C^2, segue que

$$g''(t) = 3\left[3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\right] + 2\left[3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right] =$$

$$= 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),$$

onde $x(t) = 3t$ e $y(t) = 2t+1$. ■

Exemplo 1.21.9 *Use o Exemplo 1.21.8 para calcular $g''(t)$, sendo $g(t) = f(x,y) = x^5y^4$, $x(t) = 3t$ e $y(t) = 2t+1$.*

Solução: Do Exemplo 1.21.8 temos que

$$g''(t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4y^4$, segue que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 20x^3y^4$ e $\dfrac{\partial f^2}{\partial y\partial x}(x,y) = 20x^4y^3$. Além disso, como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^5y^3$, segue que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x^5y^2$ e, consequentemente,

$$g''(t) = 9\cdot 20x^3y^4 + 12\cdot 20x^4y^3 + 4\cdot 12x^5y^2 = 12x^3y^2\left(15y^2 + 20xy + 4x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(t) = 12\cdot(3t)^2\cdot(2t+1)^2\left(15(2t+1)^2 + 20(3t)(2t+1) + 4(3t)^2\right).$$

■

Exemplo 1.21.10 *Suponha que* $f = f(x,y)$ *seja de classe* C^2 *num aberto* $D \subset \mathbb{R}^2$. *Considere* $g(t) = t^2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, *onde* $x(t) = t^2$ *e* $y(t) = t^3$. *Expresse* $g'(t)$ *em função das derivadas parciais de* f.

Solução: Pela regra do produto, temos que

$$g'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + t^2 \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right].$$

Assim, como $\dfrac{dx}{dt} = 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2$ e

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{dy}{dt} = 2t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 3t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$

segue que

$$g'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2t^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 3t^4\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

■

Exemplo 1.21.11 *Suponha que* $z = f(x, x^2)$ *seja de classe* C^2 *num aberto* $D \subset \mathbb{R}^2$. *Expresse* $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$ *em função das derivadas parciais de* f.

Solução: Considere $z = f(x,y)$, com $x = x$ e $y = x^2$. Assim pela regra da cadeia temos que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) + 2\left[\frac{d}{dx}(x)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\right].$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

segue que

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right],$$

e, sendo f de classe C^2, segue que

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

■

Exemplo 1.21.12 *Suponha $u = u(x, y)$, $x = x(r, s)$ e $y = y(r, s)$ e admita que $u_{xy} = u_{yx}$. Prove, usando a regra da cadeia, que*

$$u_{rr} = u_{xx}x_r^2 + 2u_{xy}x_ry_r + u_{yy}y_r^2 + u_xx_{rr} + u_yy_{rr}.$$

Solução: Temos que $u_r = u_xx_r + u_yy_r$ e, consequentemente, segue que

$$u_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}(u_xx_r) + \frac{\partial}{\partial r}(u_yy_r) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(u_x)x_r + u_x\frac{\partial}{\partial r}(x_r) + \frac{\partial}{\partial r}(u_y)y_r + u_y\frac{\partial}{\partial r}(y_r).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial r}(u_x) = u_{xx}x_r + u_{xy}y_r \text{ e } \frac{\partial}{\partial r}(u_y) = u_{yx}x_r + u_{yy}y_r,$$

segue que

$$u_{rr} = (u_{xx}x_r + u_{xy}y_r)\,x_r + u_xx_{rr} + (u_{yx}x_r + u_{yy}y_r)\,y_r + u_yy_{rr} =$$

$$= u_{xx}x_r^2 + 2u_{xy}x_ry_r + u_{yy}y_r^2 + u_xx_{rr} + u_yy_{rr}.$$

■

Exemplo 1.21.13 *Seja $z = f(u - 2v, v + 2u)$, onde $f(x, y)$ é uma função de classe C^2 num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Expresse $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em termos das derivadas parciais de f.*

Solução: Considere $z = z(x, y)$, $x = u - 2v$ e $y = v + 2u$. Assim, do Exemplo 1.21.12 temos que

$$z_{uu} = z_{xx}x_u^2 + 2z_{xy}x_uy_u + z_{yy}y_u^2 + z_xx_{uu} + z_yy_{uu}.$$

Daí,

$$z_{uu} = z_{xx} + 4z_{xy} + 4z_{yy}.$$

■

Agora vamos ao exercícios...

1.22 Exercício

Exercício 1.22.1 *Encontre todas as derivadas parciais de segunda e terceira ordem de cada um dos itens abaixo.*

a) $f(x, y) = 6x + 3y - 7$;

b) $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$;

c) $f(x, y) = 3xy + 6x - y^x$;

d) $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$;

e) $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$;

f) $f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y}$;

g) $V(r, h) = \pi.r^2.h$;

h) $g(w, p) = w^4 - 2w^2p + 3w^2 - p^4$;

i) $f(s, t) = t + \sqrt{s^2 + t^2}$.

Exercício 1.22.2 *Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f, sendo g dada por:*

a) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $x = t^2$ *e* $y = sen(t)$;

b) $g(t) = t^3 \dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)$;

c) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5\dfrac{\partial f}{\partial y}(sen(3t), t)$.

Exercício 1.22.3 *Sendo $u = u(x, y)$, $x = x(r, s)$ e $y = y(r, s)$ e considerando que $u_{xy} = u_{yx}$, calcule u_{ss}.*

Exercício 1.22.4 *Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $g(t) = f(5t, 4t)$.*

Exercício 1.22.5 *Mostre que a mudança de variáveis $x = e^u$ e $y = e^v$ transforma a equação $x^2 z_{xx} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y = 1$ em $z_{uu} + z_{vv} = 1$.*

Exercício 1.22.6 *Mostre que cada uma das funções $u = u(x, y)$ a seguir satisfazem a Equação de Laplace em $\mathbb{R}^2$ dada por $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.*

a) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

b) $u(x, y) = e^x sen(y) + e^y cos(x)$;

c) $u(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

d) $u(x, y) = \arctan\left(\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$.

Exercício 1.22.7 *A Equação de Laplace em $\mathbb{R}^3$ é dada por $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Mostre que $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ satisfaz a equação de Laplace quando $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.*

Exercício 1.22.8 *Para cada uma das funções a seguir, encontre, se existir, $f_{xy}(0, 0)$ e $f_{yx}(0, 0)$.*

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.