1.9 O Produto Escalar entre vetores

Vamos falar agora de uma das mais importantes operações envolvendo vetores. Essa operações será extremamente importante para relacionar os elementos da geometria euclidiana com o estudo de vetores. Essa operação é chamada de *Produto Escalar* ou *Produto Interno Usual*. Vamos iniciar estabelecendo a definição de *Ângulos* entre dois vetores.

Definição 1.9.1 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Tome dois segmentos orientados, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, que representem os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente. Então, o Ângulo θ, entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é o ângulo entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. Notações: $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$.*

Na Figura 1.42 tem a representação da definição de ângulo entre dois vetores.

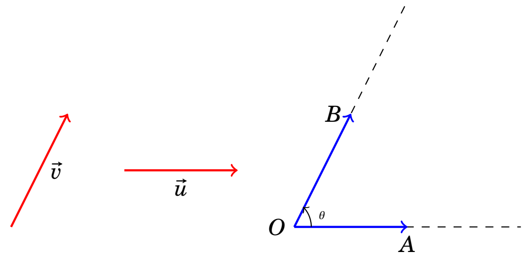

Figura 1.42: Ilustração da definição de ângulo entre vetores.

Observação 1.9.1 *Da Definição 1.9.1 de ângulo entre vetores, podemos concluir que se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido, então, $\theta = 0$. Por outro lado, se eles tem a mesma direção mas sentidos contrários, então, $\theta = \pi$.*

Definição 1.9.2 *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de Ortogonais se o ângulo entre eles for $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$. Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Exemplo 1.9.1 *Na Figura 1.43, em (a) temos a ilustração de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = 0.$; em (b) temos a ilustração de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \pi$. Por fim, em (c) em (b) temos a ilustração de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

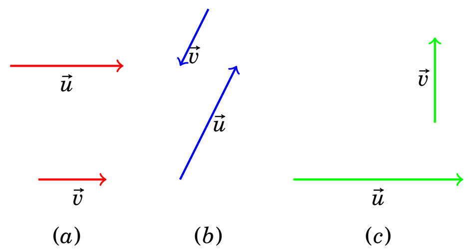

Figura 1.43: Ilustração de vetores de mesma direção e ortogonais.

■

Observação 1.9.2 *a) Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u} \perp \vec{v}$, então, o vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é dado pela hipotenusa de um triângulo retângulo, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os cateto, como visto na Figura 1.44. Por isso, temos que*

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 .$$

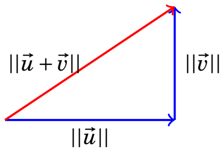

Figura 1.44: Ilustração da construção de um triângulo retângulo com dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) O vetor nulo é perpendicular a qualquer outro vetor, ou seja, $\vec{u} \perp \vec{0}$, para todo $\vec{u}$.

c) Um vetor $\vec{u}$ é ortogonal a um vetor $\vec{v}$, então, segue que ele vai ser ortogonal a qualquer múltiplo de $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \perp m\vec{v}, \ \forall \ m \in \mathbb{R}.$$

d) Dado dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então, o ângulo suplementar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por $\sphericalangle(\vec{u},-\vec{v})$, como ilustrado na Figura 1.45. Em outras palavras,

$$\sphericalangle(\vec{u},-\vec{v}) = \pi - \sphericalangle(\vec{u},\vec{v}).$$

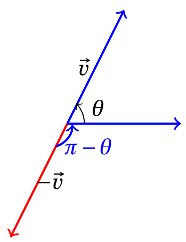

Figura 1.45: Ilustração do ângulo suplementar entre dois vetores.

Agora vamos apresentar uma definição do *Produto Escalar*.

Definição 1.9.3 *Chamamos de Produto Escalar, ou Produto Interno Usual, de dois vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ do $\mathbb{R}^n$, ao número real $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (ou $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$) dado por*

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \vec{u}\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ dois vetores do $\mathbb{R}^n$ e seja $\theta = \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$, como apresentado na Figura 1.46.

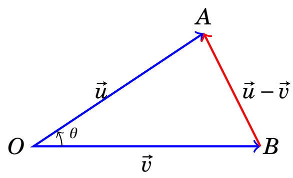

Figura 1.46: Ilustração de um triângulo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OAB, temos que

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos(\theta).$$

Assim, como

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_1)^2 + \cdots + (b_n-a_n)^2 =$$

$$\left(a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2\right) + \cdots + \left(a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2\right),$$

e

$$||\vec{u}||^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \text{ e } ||\vec{v}||^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2,$$

segue que

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \cdots - 2a_nb_n = -2\,||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos(\theta).$$

Portanto, podemos reescrever o produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como a seguir:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos(\theta).$$

Observação 1.9.3 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores.*

a) Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

b) Lemos o número $\vec{u}\cdot\vec{v}$, ou $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, por "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

c) É possível identificar o produto escalar com o produto de matrizes. Para isso, considere os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, dados pela representação em forma de matriz coluna, ou seja,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Então, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pode ser visto como sendo o elemento que surge no produto das matrizes $\vec{u}^T\cdot\vec{v}$.

De fato: *Temos que*

$$\vec{u}^T\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

$\square$

d) Para todo vetor $\vec{u}$, temos que

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

De fato: *Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, então,*

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = ||\vec{u}||^2 \Rightarrow ||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

□

e) Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos que

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

De fato: *Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$. Dessa forma, considere $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Assim,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0.$$

□

f) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, para todo $\vec{u}$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Exemplo 1.9.2 *Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = (-1, -4, -1)$, determine:*

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$; *b)* $\vec{u} \cdot \vec{u}$; *c)* $\vec{0} \cdot \vec{v}$.

Solução:

a) Temos que $\vec{u} + \vec{v} = (3,2,1) + (-1,-4,-1) = (2,-2,0)$ e que $2\vec{u} - \vec{v} = 2(3,2,1) - (-1,-4,-1) = (6,4,2) + (1,4,1) = (7,8,3)$. Assim,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = (2,-2,0) \cdot (7,8,3) = 2.(7) + (-2).(8) + 0.(3) = 14 - 16 + 0 = -2.$$

b) Temos que

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (3,2,1) \cdot (3,2,1) = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14 - 16 + 0 = -2.$$

c) É claro que $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$, visto que $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0(-1) + 0(-4) + 0(-1) = 0$.

■

Exemplo 1.9.3 *Dado os vetores $\vec{u} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$, e os pontos $A = (4,-1,2)$ e $B = (3,2,-1)$, determine o valor de α de forma que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.*

Solução: Temos que $\overrightarrow{BA} = A - B = (4,-1,2) - (3,2,-1) = (1,-3,3)$ e, por isso, $\vec{v} + \overrightarrow{BA} = (\alpha, 2, 3) + (1,-3,3) = (\alpha + 1, -1, 6)$. Daí, segue que

$$5 = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = (4, \alpha, -1) \cdot (\alpha + 1, -1, 6) = 4\alpha + 4 - \alpha - 6 = 3\alpha - 2,$$

ou seja,

$$3\alpha - 2 = 5 \Rightarrow 3\alpha = 7 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{3}.$$

Portanto, o valor de α procurado é $\frac{7}{3}$. ■

Exemplo 1.9.4 *Sendo* $\vec{u} = (2,0,-3)$ *e* $\vec{v} = (1,1,1)$*, determine o valor do ângulo entre eles.*

Solução: Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Assim, temos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}.$$

Daí, como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2.1 + 0.1 + (-3).1 = -1$, $||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ e $||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, segue que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} = \frac{-1}{\sqrt{13}.\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{39}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{39}}\right).$$

■

Proposição 1.9.1 *Sejam* $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *vetores e seja* $k \in \mathbb{R}$*. Assim,*

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

c) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Demonstração:

a) Considere $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. Assim,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

b) Considere $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 \\ c_2 + c_3 \end{bmatrix} = a_1(a_2+a_3) + b_1(b_2+b_3) + c_1(c_2+c_3) =$$

$$= a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3 + c_1c_2 + c_1c_3 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

c) Exercício.

■

Exemplo 1.9.5 *Sendo* $||\vec{u}|| = 4\,||\vec{v}|| = 2$ *e* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$*, calcule* $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v})$*.*

Solução: Temos que

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) = 3\vec{u} \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) + (-2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) = -3\vec{u} \cdot \vec{u} + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} + (-8)\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= -3||\vec{u}||^2 + 14\vec{u} \cdot \vec{v} - 8||\vec{v}||^2 = -3.4 + 14.3 - 8.\frac{1}{4} = -12 + 42 - 2 = 28.$$

Portanto, $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) = 28$. ■

Exemplo 1.9.6 *Mostre que:*

a) $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$;

b) $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$;

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

Solução:

a) Temos que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$

b) Temos que

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})-\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$

c) Temos que

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2.$$

■

Exemplo 1.9.7 *Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (-2,3,-2)$ e $\vec{u} = (-1,2,4)$.*

Solução: Temos que se $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \theta$, então:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{(-1,2,4)\cdot(-2,3,-2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{2+6-8}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{17}} = 0,$$

ou seja, $\cos(\theta) = 0$ e, por isso, $\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Portanto, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $\frac{\pi}{2}$ radianos. ■

Exemplo 1.9.8 *Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (1,1,4)$ e $\vec{u} = (-1,2,2)$.*

Solução: Temos que se $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \theta$, então:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{(1,1,4)\cdot(-1,2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ou seja, $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, por isso, $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Portanto, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$ radianos. ■

Exemplo 1.9.9 *Sabendo que $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u}|| = 2$ e que o ângulo entre eles é de $\frac{2\pi}{3}$, calcule:*

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$; *b)* $||\vec{u}+\vec{v}||$; *c)* $||\vec{u}-\vec{v}||$.

Solução:

a) Seja $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \theta$, então, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ e, por isso, θ é um ângulo do segundo quadrante. Consequentemente, $\cos(\theta) < 0$. Assim,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6\cdot\frac{1}{2} = -3.$$

Portanto, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$.

b) Do Exemplo 1.9.6, segue que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 + 2\cdot(-3) + 2^2 = 9-6+4 = 7,$$

e, por isso, $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{7}$. Portanto, $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{7}$.

c) Novamente, do Exemplo 1.9.6, segue que

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2\cdot(-3) + 2^2 = 9+6+4 = 19,$$

e, por isso, $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{19}$. Portanto, $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{19}$.

■

Exemplo 1.9.10 *Sabendo que* $\vec{v} = (2,1,-1)$ *forma um ângulo de* $\dfrac{\pi}{3}$ *com o vetor* $\overrightarrow{AB}$*, determinado pelos pontos* $A = (3,1,-2)$ *e* $B = (4,0,m)$*, calcule o valor de* m*.*

Solução: Temos que se $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1,m+2)$, então,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{(2,1,-1)\cdot(1,-1,m+2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(m+2)^2}} = \frac{2-1-m-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+4m+6}} =$$

$$= \frac{-1-m}{\sqrt{6m^2+24m+36}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1-m}{\sqrt{6m^2+24m+36}} \Leftrightarrow \sqrt{6m^2+24m+36} = -2-2m.$$

É claro que a raiz quadrada é um número não negativo e, por isso, $m \leq -1$. Com isto, elevando ao quadrado os dois lados da igualdade chegamos a

$$6m^2+24m+36 = 4m^2+8m+4 \Leftrightarrow 2m^2+16m+32 = 0 \Leftrightarrow m^2+8m+16 = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = -4.$$

Portanto, O valor de m que satisfaz o produto escalar é $m = -4$. ■

Exemplo 1.9.11 *Determine os ângulos internos de um triângulo ABC sendo* $A = (3,-3,3)$*,* $B = (2,-1,2)$ *e* $C = (1,0,2)$*.*

Solução: Considere o triângulo ABC como dado pela Figura 1.47.
Assim, temos que $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$. Como $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,3,-1)$ e $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,2,-1)$, segue que

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|\cdot\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|} = \frac{(-2,3,-1)\cdot(-1,2,-1)}{\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2+6+1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} \Rightarrow$$

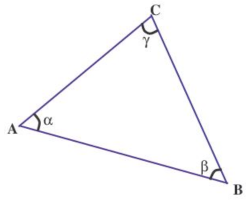

Figura 1.47:

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{9}{2\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{9}{2\sqrt{21}}\right).$$

Agora, como $\beta = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, segue que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (2,-3,1)$ e $\overrightarrow{BC} = C - B = (-1,1,0)$, segue que

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{(1,-2,1)\cdot(-1,1,0)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}} = \frac{-1-2+0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\beta) = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Por fim, como $\gamma = \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, segue que $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = (2,-3,1)$ e $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = (1,-1,0)$, assim,

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CB}\right\|} = \frac{(2,-3,1)\cdot(1,-1,0)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{2+3+0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{5}{2\sqrt{7}} Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right).$$

Portanto, os ângulos do triângulo ABC são $\arccos\left(\frac{9}{2\sqrt{21}}\right)$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\arccos\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$.
■

Exemplo 1.9.12 *Prove que o triângulo ABC, dado por* $A = (2,3,1)$, $B = (2,1,-1)$ *e* $C = (2,2,-2)$ *é um triângulo retângulo.*

Solução: Considere o triângulo ABC como dado pela Figura 1.48.

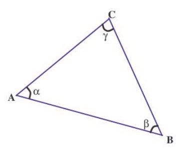

Figura 1.48:

Assim, o triângulo ACB é retângulo se α, β ou γ for um ângulo reto, ou seja, se $\cos(\alpha) = 0$, $\cos(\beta) = 0$ ou $\cos(\gamma) = 0$. Em outras palavras, se $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$,

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ou $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$. Assim, como $\overrightarrow{AB}=(0,-2,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-1,-3)$, segue que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+2+6=8\neq 0$; $\overrightarrow{BA}=(0,2,2)$ $\overrightarrow{BC}=(0,1,-1)$, segue que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ e, por isso, $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ e, portanto, o triângulo é retângulo em B. ■

Exemplo 1.9.13 *Determine um vetor $\vec{w}$ que seja ortogonal aos vetores $\vec{v}=(1,-1,0)$ e $\vec{u}=(1,0,1)$.*

Solução: Como $\vec{w}\perp\vec{u}$ e como $\vec{w}\perp\vec{v}$, segue que $\vec{w}\cdot\vec{u}=0$ e $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$. Assim, tomando $\vec{w}=(x,y,z)$, segue que

$$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(1,0,1)=0\\(x,y,z)\cdot(1,-1,0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+z=0\\x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-x\\y=x\end{cases}.$$

Assim, um vetor $\vec{w}$ que é ortogonal aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ ao mesmo tempo é da forma $(x,x,-x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. ■

Exemplo 1.9.14 *Determine o valor de x para que os vetores $\vec{u}=(x,10,200)$ e $\vec{v}=(-10,x,0)$ sejam ortogonais.*

Solução: Para que $\vec{u}\perp\vec{v}$ precisamos de $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Assim, como

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x,10,200)\cdot=(-10,x,0)=-10x+10x+0=0,$$

segue que $\vec{u}\perp\vec{v}$, para todo $x\in\mathbb{R}$. ■

Exemplo 1.9.15 *As medidas angulares entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são, respectivamente, 30^o, 45^o e 90^o. Mostre que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é um conjunto LI.*

Solução: Sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, tal que

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}.$$

Como os vetores são unitários, temos que

$$||\vec{u}||=||\vec{v}||=||\vec{w}||=1.$$

Assim, multiplicando a combinação linear $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ por $\vec{u}$ dos dois lados, temos que

$$\vec{u}\cdot\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{0}\Rightarrow\alpha\vec{u}\cdot\vec{u}+\beta\vec{u}\cdot\vec{v}+\gamma\vec{u}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha||\vec{u}||^2+\beta||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos\left(30^o\right)+\gamma||\vec{u}||\cdot||\vec{w}||\cos\left(45^o\right)=0\Rightarrow\alpha+\beta\frac{\sqrt{3}}{2}+\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$$

Por outro lado, multiplicando a combinação linear $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ por $\vec{v}$ dos dois lados, temos que

$$\vec{v}\cdot\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}\right)=\vec{v}\cdot\vec{0}\Rightarrow\alpha\vec{v}\cdot\vec{u}+\beta\vec{v}\cdot\vec{v}+\gamma\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\,||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos\left(30^o\right)+\beta\,||\vec{v}||^2+\gamma\,||\vec{v}||\cdot||\vec{w}||\cos\left(90^o\right)=0\Rightarrow\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta=0.$$

Por fim, multiplicando a combinação linear $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ por $\vec{w}$ dos dois lados, temos que

$$\vec{w}\cdot\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}\right)=\vec{w}\cdot\vec{0}\Rightarrow\alpha\vec{w}\cdot\vec{u}+\beta\vec{w}\cdot\vec{v}+\gamma\vec{w}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\,||\vec{u}||\cdot||\vec{w}||\cos\left(45^o\right)+\beta\,||\vec{w}||\cdot||\vec{v}||\cos\left(90^o\right)+\gamma\,||\vec{w}||^2=0\Rightarrow\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}+\gamma=0.$$

Assim, resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta\frac{\sqrt{3}}{2}+\gamma\frac{\sqrt{2}}{2} & = & 0\\ \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta & = & 0\\ \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}+\gamma & = & 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\frac{3}{4}\alpha-\frac{1}{2}\alpha & = & 0\\ \beta & = & -\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \gamma & = & -\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.,$$

temos que $\alpha=\beta=\gamma=0$ e, por isso, o conjunto $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI. ■

Agora, vamos definir um conceito muito importante na matemática, que é o de *Ângulos Diretores* de um dado vetor $\vec{v}$.

Definição 1.9.4 *Seja $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ um vetor no espaço. Os Ângulos Diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que o vetor $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Os Cossenos Diretores são os valores dos cossenos dos ângulos diretores.*

Observação 1.9.4 *Na Figura 1.49 é apresentada uma representação dos ângulos diretores de um vetor $\vec{v}$.*

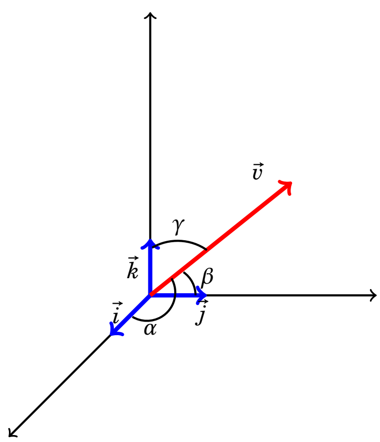

Figura 1.49: Ilustração dos ângulos diretores de um vetor $\vec{v}$.

Observe que

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{||\vec{v}||.\left|\left|\vec{i}\right|\right|}=\frac{(x,y,z).(1,0,0)}{||\vec{v}||}=\frac{x}{||\vec{v}||},$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{||\vec{v}||.\left|\left|\vec{j}\right|\right|} = \frac{(x,y,z).(0,1,0)}{||\vec{v}||} = \frac{y}{||\vec{v}||}\ e$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{||\vec{v}||.\left|\left|\vec{k}\right|\right|} = \frac{(x,y,z).(0,0,1)}{||\vec{v}||} = \frac{z}{||\vec{v}||}.$$

Em outras palavras, os cossenos diretores de um vetor $\vec{v}$ são os valores das coordenadas do versor desse vetor, ou seja, se $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v}$, então,

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{x}{||\vec{v}||}, \frac{y}{||\vec{v}||}, \frac{z}{||\vec{v}||}\right) = \left(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)\right).$$

Como

$$||\vec{u}|| = 1 \Rightarrow \sqrt{(\cos(\alpha))^2 + (\cos(\beta))^2 + (\cos(\gamma))^2} = 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma) = 1,$$

ou seja, a soma dos quadrados dos cossenos diretores de um vetor $\vec{v}$ é igual um.

Exemplo 1.9.16 *Calcule os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6,-2,3)$.*

Solução: Um vetor unitário na direção do vetor $\vec{v}$ é dado por $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ e, por isso,

$$\left(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)\right) = \frac{(6,-2,3)}{\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{(6,-2,3)}{\sqrt{49}} = \left(\frac{6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Então, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{7}\right),\ \beta = \arccos\left(\frac{-2}{7}\right)\ \text{e}\ \gamma = \arccos\left(\frac{3}{7}\right).$$

■

Exemplo 1.9.17 *Dados os pontos $A = (2,2,-3)$ e $B = (3,1,-3)$, determine os cossenos diretores do vetor $\overrightarrow{AB}$.*

Solução: Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1,0)$. Então, um vetor unitário $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{v}$ é dado por $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$. Assim,

$$\left(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)\right) = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Assim, os ângulos diretores do vetor $\vec{v}$ são

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},\ \beta = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}\ \text{e}\ \gamma = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

■

Exemplo 1.9.18 *Os ângulos diretores do vetor $\vec{v}$ são α, 45^o e 60^o. Determine o valor de α.*

Solução: Temos que a soma dos quadrados dos cossenos diretores de um vetor é 1. Assim,

$$\cos^2(\alpha)+\cos^2\left(45^o\right)+\cos^2\left(60^o\right)=1 \Rightarrow \cos^2(\alpha)+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow \cos^2(\alpha)=1-\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha)=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos(\alpha)=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3}.$$

Portanto $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ou $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$. ■

Exemplo 1.9.19 *Seja $\vec{v}=(x,y,z)$ um vetor. Mostre que:*

a) $\vec{v}$ é perpendicular ao eixo das abscissas se, e somente se, $x=0$;

b) $\vec{v}$ é perpendicular ao eixo das ordenadas se, e somente se, $y=0$;

c) $\vec{v}$ é perpendicular ao eixo das cotas se, e somente se, $z=0$.

Solução:

a) Seja $\vec{v}=(x,y,z)$ um vetor perpendicular ao eixo das abscissas. Assim, temos que $\vec{v}\perp\vec{i}$ e, por isso,

$$\vec{v}\perp\vec{i} \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(1,0,0)=0 \Leftrightarrow x.1+y.0+z.0=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Portanto $\vec{v}=(x,y,z)$ é perpendicular ao eixo das abscissas se, e somente se, $x=0$.

b) Seja $\vec{v}=(x,y,z)$ um vetor perpendicular ao eixo das ordenadas. Assim, temos que $\vec{v}\perp\vec{j}$ e, por isso,

$$\vec{v}\perp\vec{j} \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(0,1,0)=0 \Leftrightarrow x.0+y.1+z.0=0 \Leftrightarrow y=0.$$

Portanto $\vec{v}=(x,y,z)$ é perpendicular ao eixo das ordenadas se, e somente se, $y=0$.

c) Seja $\vec{v}=(x,y,z)$ um vetor perpendicular ao eixo das cotas. Assim, temos que $\vec{v}\perp\vec{k}$ e, por isso,

$$\vec{v}\perp\vec{k} \Leftrightarrow (x,y,z)\cdot(0,0,1)=0 \Leftrightarrow x.0+y.0+z.1=0 \Leftrightarrow z=0.$$

Portanto $\vec{v}=(x,y,z)$ é perpendicular ao eixo das cotas se, e somente se, $z=0$.

■

Exemplo 1.9.20 *Um vetor $\vec{v}$ forma ângulos de 60^o e 120^o com os vetores $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Sabendo que $||\vec{v}||=2$, determine $\vec{v}$.*

Solução: Como a soma dos quadrados dos cossenos diretores é igual a 1, segue que

$$\cos^2(\alpha)+\cos^2\left(60^o\right)+\cos^2\left(120^o\right)=1 \Rightarrow \cos^2(\alpha)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2(\alpha)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4} \text{ ou } \alpha=\frac{3\pi}{4}.$$

Portanto, um versor de $\vec{v}$ é dado por $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ ou por $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Consequentemente,

$$\vec{v}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{2},1,-1\right) \text{ ou } \vec{v}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(-\sqrt{2},1,-1\right).$$

■

Agora vamos falar da *Projeção Ortogonal* de um vetor $\vec{u}$ sobre um outro vetor $\vec{v}$. Primeiro, apresentaremos a definição de projeção ortogonal.

Definição 1.9.5 *Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo. Dado qualquer vetor $\vec{u}$, o vetor $\vec{p}$ que satisfaz*

- $\vec{p} \parallel \vec{v}$ *e*
- $(\vec{p}-\vec{u}) \perp \vec{u}$

é chamado de Projeção Ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Notação: $\vec{p}=Proj_{\vec{v}}\vec{u}$.

Considere que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não nulos e que $\theta = \sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$. Assim, existem duas possibilidades para θ, como visto na Figura 1.50.

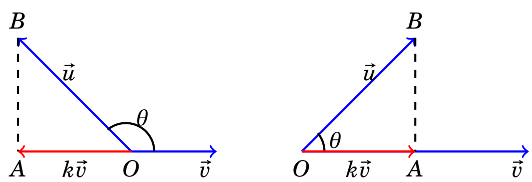

Figura 1.50: Ilustração das possibilidades do ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Em ambos os casos, do triângulo OAB, retângulo em A, segue que

$$|\cos(\theta)|=\frac{||k\vec{v}||}{||\vec{u}||} \Rightarrow |k|.||\vec{v}||=||\vec{u}||.|\cos(\theta)| \Rightarrow |k|=\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\cdot|cos(\theta)|.$$

Portanto, como $\cos(\theta)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}$, segue que

$$k=\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}.$$

Consequentemente, temos que $Proj_{\vec{v}}\vec{u}$ é dada por

$$Proj_{\vec{v}}\vec{u}=\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\right)\cdot\vec{v}=\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\cdot\vec{v}.$$

Proposição 1.9.2 *Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo. Dado qualquer vetor $\vec{u}$, existe uma única projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Além disso, temos que*

$$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\cdot\vec{v}.$$

Demonstração: A unicidade não será demonstrada por enquanto. A fórmula já foi demonstrada com a argumentação anterior. ■

Exemplo 1.9.21 *Determine a projeção de $\vec{u} = (2,3,4)$ sobre o vetor $\vec{v} = (1,-1,0)$.*

Solução: Temos que

$$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\cdot\vec{v} = \left(\frac{(2,3,4)\cdot(1,-1,0)}{(1,-1,0)\cdot(1,-1,0)}\right)\cdot(1,-1,0) =$$

$$= \left(\frac{2-3+0}{1+1+0}\right)(1,-1,0) = \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

Portanto, a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é dada por $Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. ■

Exercício 1.9.1 *Considere $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$.*

a) Obtenha $Proj_{\vec{u}}\vec{v}$.

b) Determine dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$, sendo $\vec{p} \parallel \vec{u}$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$.

Solução:

a) Como $||\vec{u}||^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9$, segue que

$$Proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{(3,-6,0)(2,-2,1)}{9}\right)(2,-2,1) = (4,-4,2).$$

b) Como $\vec{p} \parallel \vec{u}$, segue que $\vec{p} = Proj_{\vec{u}}\vec{v}$. Assim, $\vec{p} = (4,-4,2)$. Por outro lado, como $\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}$ segue que $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p} = (3,-6,0) - (4,-4,2) = (-1,-2,-2)$.

■

Sendo $\vec{v}$ um vetor unitário, então,

$$Proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\right)\cdot\vec{v} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}$$

e, por isso,

$$||Proj_{\vec{v}}\vec{u}|| = \frac{||(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{v}||}{||\vec{v}||} = |\vec{u}\cdot\vec{v}|\cdot||\cdot\vec{v}|| = |\vec{u}\cdot\vec{v}|.$$

Em outras palavras, o comprimento do vetor projeção $Proj_{\vec{v}}\vec{u}$, onde $\vec{v}$ é um vetor unitário, é igual a norma do produto escalar de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.

Observação 1.9.5 *Além da importância matemática do produto escalar, existe também a aplicação dessa operação em outras áreas, como por exemplo, o Trabalho realizado por uma força. Seja $\vec{F}$ uma força constante. Assim, o trabalho da força $\vec{F}$ ao longo de um determinado deslocamento $\vec{d}$ é definido como sendo o produto escalar dessa força pelo deslocamento. Uma ilustração dessa definição é apresentada na Figura 1.51.*

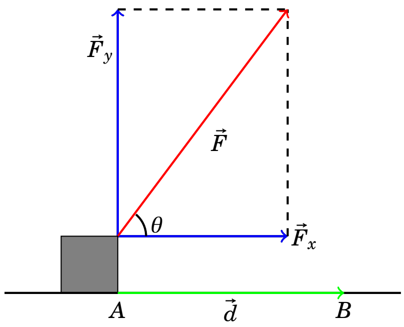

Figura 1.51: Ilustração da decomposição de uma força $\vec{F}$ sobre o descolamento $\vec{d}$.

Podemos observar que a componente que realiza o trabalho é $\vec{F}_x$, que é paralela ao deslocamento $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Então,

$$\left|\left|\vec{F}_x\right|\right| = \left|\left|\vec{F}\right|\right| \cos(\theta).$$

Assim, a grandeza física trabalho, denotada por ω, é uma grandeza escalar e tem como unidade no sistema internacional J (joule). A expressão do trabalho é

$$\omega = \vec{f} \cdot \vec{d} = \left|\left|\vec{f}\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{d}\right|\right| \cdot \cos(\theta).$$

Agora, faça alguns exercícios.

1.10 Exercícios

Exercício 1.10.1 *Seja $ABCDEF$ um hexágono de centro O. Obtenha os valores dos seguintes ângulos:*

a) $\sphericalangle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}\right)$;

b) $\sphericalangle\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}\right)$;

c) $\sphericalangle\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}\right)$;

d) $\sphericalangle\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BF}\right)$;

e) $\sphericalangle\left(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{OC}\right)$;

f) $\sphericalangle\left(-\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OF}\right)$.

Exercício 1.10.2 *Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcule:*

a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$;

b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$;

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$;

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$;

e) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u})$;

f) $(\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (-3\vec{v})$;

g) $(-\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{v} - 3\vec{u})$;

h) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (-4\vec{u} - 5\vec{v})$.

Exercício 1.10.3 *Sejam os vetores* $\vec{u} = (2, a, -1)$*,* $\vec{v} = (3, 1, -2)$ *e* $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$*. Determine a de modo que* $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$*.*

Exercício 1.10.4 *Determine um vetor* $\vec{v}$*, paralelo ao vetor* $\vec{u} = (2, -1, 3)$*, tal que* $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$*.*

Exercício 1.10.5 *Determine um vetor* $\vec{v}$ *que tenha módulo 5, que seja ortogonal ao eixo das abscissas e que* $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$*, sendo* $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$*.*

Exercício 1.10.6 *Sabendo que* $||\vec{u}|| = 2$*,* $||\vec{v}|| = 3$ *e que* $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$*, calcule*

a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$*;*

b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$*;*

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$*;*

d) $(3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} - 5\vec{v})$*;*

e) $\vec{u} \cdot (-3\vec{v})$*;*

f) $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (3\vec{v} - \vec{u})$*;*

g) $(-\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 2\vec{v})$*;*

h) $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u})$*.*

Exercício 1.10.7 *Calcule* $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v}$*, sabendo que* $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$*,* $||\vec{u}|| = 2$*,* $\vec{v} = 3$ *e* $\vec{w} = 5$*.*

Exercício 1.10.8 *Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo cujo lado mede* $20cm$*. Calcule* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$*.*

Exercício 1.10.9 *Mostre que vale a desigualdade chamada de Desigualdade Triangular, ou seja, para todo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *temos que*

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

Exercício 1.10.10 *Mostre que vale a desigualdade chamada de Desigualdade de Schwarz, ou seja, para todo* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *temos que*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||.$$

Exercício 1.10.11 *Calcule os ângulos do triângulo determinado pelos pontos* $A = (-1, 0, 5)$*,* $B = (2, -1, 4)$ *e* $C = (1, 1, 1)$*.*

Exercício 1.10.12 *Dado os pontos* $A = (m, 1, 0)$*,* $B = (m - 1, 2m, 2)$ *e* $C = (1, 3, -1)$*, determine m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcule a área desse triângulo.*

Exercício 1.10.13 *Calcule os ângulos diretores dos vetores* $\vec{v} = (6, -2, 3)$ *e* $\vec{u} = (-1, 4, -3)$*.*

Exercício 1.10.14 *Determine um vetor* $\vec{v}$*, de módulo 5, sabendo que* $\vec{v}$ *é ortogonal ao eixo Y e ao vetor* $\vec{u} = (1, 0, -2)$*, e forma um ângulo obtuso com o vetor* $\vec{i}$*.*

Exercício 1.10.15 *Dados os vetores* $\vec{u} = (3, 0, 1)$ *e* $\vec{v} = (2, 0, 1)$*, determine* $Proj_{\vec{v}}\vec{u}$ *e* $Proj_{\vec{u}}\vec{v}$*.*

Exercício 1.10.16 *Determine o vetor projeção de* $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ *sobre os eixos cartesianos* X*,* Y *e* Z*.*

Exercício 1.10.17 *Determine o valor de* α *de forma que* $\vec{v} \perp \vec{u}$*, sendo* $\vec{v} = (\alpha, 2, -4)$ *e* $\vec{u} = (2, 1 - 2\alpha, 3)$*.*

Exercício 1.10.18 *Mostre que para todos os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *temos que*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||.$$

Exercício 1.10.19 *Mostre que para todos os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *temos que*

$$4\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2.$$

Exercício 1.10.20 *Mostre que para todos os vetores* $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *temos que*

$$||\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}).$$

Exercício 1.10.21 *Determine os vetores unitários* $\vec{u} = (x, y, z)$ *tais que* $Proj_{\vec{k}}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{k}$ *e sendo* $\vec{v} = (x, y, 0)$*, então,* $\sphericalangle\left(\vec{v}, \vec{i}\right) = \frac{\pi}{6}$*.*