Capítulo 8

Derivadas

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. O quociente $q(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tem sentido para todo $x \neq a$. Dessa forma, temos que $q : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ define uma função cujo valor $q(x)$ dá o valor da inclinação da reta secante que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, no gráfico de f em relação ao eixo x.

Agora, suponha que x seja o tempo e que $f(x)$ represente o deslocamento de uma partícula, no instante x. Então, $q(x)$ representa a velocidade média desse ponto no intervalo de tempo entre os instantes a e x.

Esses dois exemplos são casos particulares, pois o quociente $q(x)$ representa, de uma forma geral, uma relação de variação da função $f(x)$ por unidade de variação de x, a partir do ponto a. No caso onde $a \in X \cap X'$ é natural pensar em $\lim_{x \to a} f(x)$. Caso esse limite exista, ele pode ser interpretado como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, ou a velocidade instantânea de uma partícula no instante $x = a$, ou (em geral) a taxa de variação da função f no ponto a. Esse limite é de grande importância e é o objeto de estudo desse capítulo.

8.1 A noção de Derivada

Definição 8.1.1 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A **Derivada** da função f no ponto a é o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

*Caso a derivada de f exista no ponto a, então, dizemos que f é **Derivável** no ponto a.*

■

Definição 8.1.2 *Se uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos $x \in X \cap X'$, então, dizemos que f é **Derivável** em X.*

■

Definição 8.1.3 *Seja $f' : X \cap X' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, a função derivada de f. Se f' for uma função contínua, então, temos que f é dita ser de **Classe** C^1.*

■

Observação 8.1.1 *Existem outras notações para a derivada de f no ponto a, onde destacamos*

$$Df(a), \frac{df}{dx}(a) \text{ e } \left.\frac{d}{dx}\right|_a.$$

■

Vejamos as primeiras propriedades.

Teorema 8.1.1 *A fim de que $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in X$ implique em $f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, onde $\lim \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, temos que $c = f'(a)$.*

Demonstração: Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in X\}$. Dessa forma, temos que $0 \in Y \cap Y'$. Suponha que $f'(a)$ exista. Dessa forma, tome a função $r : Y \to X$ dada por $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$. Daí,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Como $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, segue que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

Reciprocamente, se vale a condição $\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - c$, com $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, segue que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - c = 0$ e, por isso, temos que

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

■

Corolário 8.1.1 *Uma função é contínua nos pontos onde ela é derivável.*

Demonstração: Seja f uma função derivável em a. Então, segue do Teorema 8.1.1 que $f(a+h) = f(a) - f'(a)h + r(h)$, onde $\lim \frac{r(h)}{h} = 0$. Dessa forma, $f(a)$ existe e, além disso,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \left(f(a) + \frac{r(h)}{h} h \right) = f(a).$$

Portanto, temos que $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. ■

Observação 8.1.2 *Para toda função f, definida nos pontos a e $a+h$, e todo número real c, podemos escrever a igualdade $f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, a qual define o número $r(h)$. O que o Teorema 8.1.1 afirma é que existe no máximo um número real c tal que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ e, além disso, quando esse número c existe, temos que $c = f'(a)$.*

■

Observação 8.1.3 *O Teorema 8.1.1 ainda afirma que, quando $f'(a)$ existe, seque que o acréscimo $f(a+h)-f(a)$ é a soma de uma "parte linear" $c \cdot h$, proporcional ao acréscimo h da variável independente, mais um "resto " $r(h)$, o qual é infinitamente pequeno em relação a h, no sentido de que o quociente $\dfrac{r(h)}{h}$ tende a zero com $h \to 0$.*

■

Agora apresentaremos a definição de Derivadas Laterais. As definições aqui apresentadas utilizam a mesma ideia dos limites laterais. Vamos as definições.

Definição 8.1.4 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+$. A **Derivada à Direita** da função f no ponto a é o limite*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

se o limite existir.

■

Definição 8.1.5 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_-$. A **Derivada à Esquerda** da função f no ponto a é o limite*

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

se o limite existir.

■

Observação 8.1.4 *a) Se $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$, ou seja, se a é um ponto de acumulação bilateral de X, a função f é derivável em a se, e somente se, $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$ existem e, além disso, temos que $f'_-(a) = f'_+(a)$.*

b) O Teorema 8.1.1 pode ser adaptado para os limites laterais. Por exemplo, para derivada à direita é preciso considerar $\lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

c) O Corolário 8.1.1 pode ser adaptado para a continuidade lateral. Por exemplo, se existe a derivada lateral à direita, então, f é contínua à direita no ponto a, ou seja, $f(a) = \lim\limits_{h \to 0_+} f(a+h)$.

d) Se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e f'_+, f'_- existem, então, f é contínua à direita e à esquerda em a e, por isso, f é contínua em a, mesmo que f não seja derivável em a.

■

Exemplo 8.1.1 *a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) é derivável em todos os pontos. Além disso, $f' \equiv 0$.*

De fato: *Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto $f(x) = k$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e, além disso, $f'(x) = 0$. □

b) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$ é derivável em todos os pontos. Além disso, $f'(x)=a$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

De fato: *Observe que, para todo $x\in\mathbb{R}$, temos que*

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[a(x+h)+b]-[ax+b]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0}a=a,\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Portanto $f(x)=ax+b$ é derivável em todo $x\in\mathbb{R}$ e, além disso, $f'(x)=a$. □

c) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ é derivável em todos os pontos. Além disso, $f'(x)=nx^{n-1}$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

De fato: *Usando Binômio de Newton, temos que*

$$(x+h)^n=\begin{pmatrix} n\\ 0\end{pmatrix}x^nh^0+\begin{pmatrix} n\\ 1\end{pmatrix}x^{n-1}h^1+\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}x^{n-2}h^2+\cdots+\begin{pmatrix} n\\ n\end{pmatrix}x^0h^n,$$

e, por isso, temos que

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\begin{pmatrix} n\\ 1\end{pmatrix}x^{n-1}+\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}x^{n-2}h^1+\cdots+\begin{pmatrix} n\\ n\end{pmatrix}x^0h^{n-1}.$$

Dessa forma,

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+h\left(\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}x^{n-2}+\cdots+\begin{pmatrix} n\\ n\end{pmatrix}x^0h^{n-2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+hg(x,h)\right]=nx^{n-1},\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Portanto $f(x)=x^n$ é derivável em todo $x\in\mathbb{R}$ e, além disso, $f'(x)=nx^{n-1}$. □

d) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\quad x\neq 0\\ 0 & se\quad x=0\end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e possui derivada em todos os pontos tais que $x\neq 0$. Contudo, $f'(0)$ não existe.

De fato: *Observe que, para $x=0$, temos que:*

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h\,sen\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

e, por isso, segue que $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right)$ *não existe.*

Por outro lado, para $x\neq 0$*, temos que*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x+h}\right)-x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+h}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{x\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x+h}\right)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]}{h}.$$

Como

$$\operatorname{sen}(A)-\operatorname{sen}(B)=2\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right),$$

chamando de $A=\dfrac{1}{x+h}$ *e* $B=\dfrac{1}{x}$*, temos que*

$$\frac{A-B}{2}=\frac{-h}{2x(x+h)}\ e\ \frac{A+B}{2}=\frac{2x+h}{2x(x+h)}.$$

Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+h}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{-h}{2x(x+h)}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2x(x+h)}\right).$$

Consequentemente,

$$f'(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}\left(\dfrac{-h}{2x(x+h)}\right)\cos\left(\dfrac{2x+h}{2x(x+h)}\right)}{h}.$$

Observe que: tomando $u=\dfrac{-h}{2x(x+h)}$*, então, se* $h\to 0$*, segue que* $u\to 0$*. Assim, assumindo o limite fundamental* $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(u)}{u}=1$*, segue que:*

$$f'(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{1}{x+h}\left(-\lim_{h\to 0}\frac{sen\left(\dfrac{-h}{2x(x+h)}\right)}{\dfrac{-h}{2x(x+h)}}\right)\lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2x(x+h)}\right)=$$

$$=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Portanto, como

$$f'(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & se\quad x\neq 0\\ \nexists, & se\quad x=0\end{cases},$$

segue que f *é derivável em todo* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$*.* $\square$

e) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x\neq 0\\ 0 & se \quad x=0\end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e possui derivada em todos os pontos.

De fato: *Observe que*

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\text{sen}\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=h\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

e, por isso, segue que $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$. *Portanto, como*

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & se \quad x\neq 0\\ 0, & se \quad x=0\end{cases},$$

segue que f é derivável em todo $x\in\mathbb{R}$. □

f) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$ é derivável em todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Porém, temos que f não é de classe C^1.

De fato: *Observe que* $f(x)=\begin{cases} -x, & se \quad x<0\\ 0, & se \quad x=0\\ x, & se \quad x>0\end{cases}$. *Como*

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0_-}\frac{-h-0}{h}=-1 \text{ e } f'_+(x)=\lim_{h\to 0_+}\frac{h-0}{h}=1,$$

segue que $f'(0)$ não existe. Assim, sabendo que

$$f'(x)=\begin{cases} -1, & se \quad x<0\\ \nexists, & se \quad x=0\\ 1, & se \quad x>0\end{cases},$$

segue que é derivável em todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, mas f não é de classe C^1, visto que f' não é contínua em $x=0$. □

g) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=[[x]]=n$, para todo $n\leq x<n+1$ é derivável em todo $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

De fato: *Para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ temos que $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(n)=0$. Por outro lado, para $x=n\in\mathbb{Z}$, segue que $f_-(x)=n-1$ e que $f_+(x)=n$. Daí, temos que*

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0_-}\frac{-(n-1)-n}{h}=+\infty \text{ e } f'_+(x)=\lim_{h\to 0_+}\frac{n-n}{h}=0.$$

Portanto, segue que $f'(x)$ não existe se $x=n\in\mathbb{Z}$. □

■

Agora vamos apresentar a **Regra de L'Hôpital**, que é uma das aplicações mais conhecidas e utilizadas relacionadas com derivada de funções reais, visto que ela auxilia no cálculo de limites indeterminados.

Teorema 8.1.2 *(**A Regra de L'Hôpital**): Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$. Nessas condições, temos que se $g'(a) \neq 0$, então,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração: Como f e g são deriváveis, segue que ambas são contínuas e, por isso, $f(a) = 0 = g(a)$. Assim, temos que $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a}$ e $g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a}$. Dessa forma, temos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

■

Corolário 8.1.2 *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Nessas condições, temos que se $g'(a) \neq 0$, então,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração: Como $\lim_{x\to a} h(x) = \pm\infty$ se, e somente se, $\lim_{x\to a} \frac{1}{h(x)} = 0$ e como $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, segue do Teorema 8.1.2 o resultado. ■

Vejamos um exemplo.

Exemplo 8.1.2 *Considere $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções dadas por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Para a função f temos que,* $\operatorname{sen}(x) \to 0$ *e $x \to 0$, quando $x \to 0$. Daí,*

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=0} = \left.\frac{\cos(x)}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por outro lado, para a função g, temos que $(e^x - 1) \to 0$ e $x \to 0$, quando $x \to 0$. Daí,

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - 1}{x} = \left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x}{1}\right|_{x=0} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.