## 2.3 Métodos para o Cálculo de Determinantes

Nessa seção apresentaremos alguns algoritmos que nos permite calcular determinantes de matrizes quadradas de forma mais eficiente. Iniciamos apresentando a *Regra de Sarrus*.[1]

### Regra de Sarrus

Seja $A=(a_{ij})_3$ uma matriz. Então, para calcular o valor do determinante de $A$, proceda como a seguir:

"Escreva a matriz $A$, acrescentando as duas primeiras colunas após a terceira coluna da matriz $A$. Para os primeiros três elementos da primeira linha da nova matriz, multiplique os elementos no sentido da diagonal principal mantendo o sinal. Em seguida, para os três últimos elementos da primeira linha da nova matriz, multiplique os elementos no sentido da diagonal secundária e inverta o sinal do produto. Dessa forma, o valor do determinante de $A$ fica dado pela soma desses seis valores."

Na prática, temos que a Regra de Sarrus é dada por: Seja $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Assim,

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33},$$

que corresponde ao valor do cálculo de determinantes de ordem 3 que desenvolvemos pela definição, na seção anterior. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.3.1** *Use a Regra de Sarrus para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

$$a)\ \begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix};\quad b)\ \begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix};\quad c)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & n & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix};\quad d)\ \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix}.$$

**Solução:**

a) Criando uma matriz $3\times 5$, acrescentando as duas primeiras colunas de $A$ no final da matriz $A$ obtermos:

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc:cc} 9 & 7 & 11 & 9 & 7 \\ -2 & 1 & 13 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right| = 9\cdot1\cdot6+7\cdot13\cdot5+11\cdot(-2)\cdot3-11\cdot1\cdot5-9\cdot13\cdot3-7\cdot(-2)\cdot6 =$$

[1]Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) foi um matemático francês, autor de vários tratados (incluindo um para solução de equações numéricas com múltiplas incógnitas e outro com múltiplas integrais e suas condições integrantes). Ele é mais conhecido por ter desenvolvido uma regra prática para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, muito utilizada na matemática.

$$= 54+455-66-55-351+84 = 121.$$

Portanto, o determinante da matriz $A$ é $\det(A) = 121$.

b) Criando uma matriz $3\times 5$, acrescentando as duas primeiras colunas de $A$ no final da matriz $A$ obtermos:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & a & c & 0 & a \\ -c & 0 & b & -c & 0 \\ a & b & 0 & a & b \end{array}\right| = 0\cdot 0\cdot 0 + a\cdot b\cdot a + c\cdot(-c)\cdot b - c\cdot 0\cdot a - 0\cdot b\cdot b - a\cdot(-c)\cdot 0 =$$

$$= 0 + a^2b - bc^2 - 0 - 0 - 0 = b(a^2-c^2).$$

Portanto, o determinante da matriz $A$ é $\det(A) = b(a^2-c^2)$.

c) Criando uma matriz $3\times 5$, acrescentando as duas primeiras colunas de $A$ no final da matriz $A$ obtermos:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ m & n & 2 & m & n \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right| = 2\cdot n\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot m\cdot 5 - 0\cdot n\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 5 - (-1)\cdot m\cdot 4 =$$

$$= 8n - 6 + 0 - 0 - 20 + 4m = 4m + 8n - 26.$$

Portanto, o determinante da matriz $A$ é $\det(A) = 4m+8n-26$.

d) Observe que

$$\begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 5^3 & \log_5 5^2 \\ 8 & \log_3 3^3 & \log_3 3^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & 3\log_5 5 & 2\log_5 5 \\ 8 & 3\log_3 3 & 5\log_3 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Assim, criando uma matriz $3\times 5$, acrescentando as duas primeiras colunas de $A$ no final da matriz $A$ obtermos:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 8 & 3 \end{array}\right| = 2\cdot 3\cdot 5 + 1\cdot 2\cdot 8 + 1\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 8 - 2\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 5\cdot 5 =$$

$$= 30+16+15-24-12-25 = 0.$$

Portanto, o determinante da matriz $A$ é $\det(A) = 0$.

■

**Exemplo 2.3.2** *Encontre o conjunto solução da equação* $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *se o mesmo existir.*

**Solução:** Calculemos o determinante usando a Regra de Sarrus. Dessa forma, criando uma matriz $3\times 5$, acrescentando as duas primeiras colunas de $A$ no final da matriz $A$ obtermos:

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & x & x & 1 & x \\ 2 & 2x & 1 & 2 & 2x \\ 3 & x+1 & 1 & 3 & x+1 \end{array}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot 2x\cdot 1 + x\cdot 1\cdot 3 + x\cdot 2\cdot (x+1) - x\cdot 2x\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot (x+1) - x\cdot 2\cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 3x + 2x(x+1) - 6x^2 - (x+1) - 2x = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{-8} = \frac{-4\pm 0}{-8} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é dado por $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. ■

**Exemplo 2.3.3** *Obtenha o conjunto solução da equação* $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix}$, *se o mesmo existir.*

**Solução:** Precisamos calcular dois determinantes para resolver a equação: um de ordem 2 e outro de ordem 3. Para o determinante de ordem 3, usando a Regra de Sarrus, criando uma matriz $3\times 5$, acrescentando as duas primeiras colunas de $A$ no final da matriz $A$ obtermos:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc:cc} x-1 & 2 & x & x-1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3x & x+1 & 2x & 3x & x+1 \end{array}\right| =$$

$$= (x-1)\cdot 1\cdot 2x + 2\cdot(-1)\cdot 3x + x\cdot 0\cdot(x+1) - x\cdot 1\cdot 3x - (x-1)\cdot(-1)\cdot(x+1) - 2\cdot 0\cdot 2x =$$

$$= 2x^2 - 2x - 6x + 0 - 3x^2 + x^2 - 1 + 0 = -8x - 1.$$

Por outro lado, para o determinante de ordem 2, temos que

$$\begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix} = -3x^2 - 8x.$$

Dessa forma, a igualdade fica dada por

$$-8x - 1 = -3x^2 - 8x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é dado por $S = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. ■

Até agora apresentamos regras para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2 e 3. Usando a definição de determinantes, matrizes de ordem maior que 3 pode se tornar uma tarefa bem complexa. Vamos, a partir de agora, apresentar regras que facilitem esse tipo de cálculo que, em geral, usam recorrência. Comecemos com a *Regra de Chiò*[2].

[2]Felice Chiò (1813-1871) foi um matemático e político italiano. Estudou na Universidade de Turim, ensinou matemática na Academia Militar de Turim e Física Matemática na Universidade de Turim. Ele publicou uma memória onde corrigiu um descuido de Lagrange em seu livro sobre séries, além de escritos na teoria de curvas, cálculo de diferenças finitas, integrais e determinantes.

## Regra de Chiò

A *Regra de Chiò* é uma regra que nos permite calcular o determinante de uma matriz $A$, de ordem n, através do determinante de uma matriz de ordem $n-1$. É importante ressaltar que, por enquanto, para aplicarmos a regra de Chiò, precisamos que $a_{11} = 1$. A demonstração da Regra de Chiò será apresentada na próxima seção, depois dos estudos das propriedades de determinantes. Vamos a regra:

"Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem $n$. Dessa forma,

- Suprima a primeira linha e a primeira coluna da matriz.
- Dos elementos que restaram na matriz, subtraia o produto dos dois elementos suprimidos (um da linha e o outro da coluna) correspondente a esse elemento restante.

Dessa forma, o determinante da matriz $A$ tem o mesmo valor do determinante da nova matriz de ordem $n-1$ obtida."

Para ilustrar, seja $A$ uma matriz de ordem três dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, então, aplicando a regra de Chiò, obtemos um novo determinante de ordem 2 como a seguir:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{1} & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e-bd & f-cd \\ h-bg & i-cg \end{vmatrix}.$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.3.4** *Use a regra de Chiò para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

**Solução:**

a) Temos que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-1\cdot x & z-1\cdot x \\ xz-1\cdot yz & xy-1\cdot yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ xz-yz & xy-yz \end{vmatrix} =$$

$$=(y-x)(xy-yz)-(z-x)(xz-yz)=xy^2-y^2z-x^2y+xyz-xz^2+yz^2+x^2z-xyz=$$
$$=x^2z-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2-xz^2=x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x).$$

Portanto, o valor do determinante é $\det(A)=x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)$.

b) Temos que

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-1\cdot 1 & 2-1\cdot 1 & 2-1\cdot 1 \\ 2-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 \\ 2-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 & 4-1\cdot 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2-1\cdot 1 & 2-1\cdot 1 \\ 2-1\cdot 1 & 3-1\cdot 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 1=1.$$

Portanto, o valor do determinante é $\det(A)=1$.

c) Temos que

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (-3)-2\cdot 2 & 5-0\cdot 2 & 1-4\cdot 2 \\ 6-2\cdot 1 & 3-0\cdot 1 & (-1)-4\cdot 1 \\ 2-2\cdot 3 & 1-0\cdot 3 & 4-4\cdot 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -7 & 5 & -7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -4 & 1 & -8 \end{vmatrix}\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} -7 & 5 & -7 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & -8 & -4 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(-7)\cdot(3)\cdot(-8)+(5)\cdot(-5)\cdot(-4)+(-7)\cdot(4)\cdot(1)-(-7)\cdot(3)\cdot(-4)-(-7)\cdot(-5)\cdot(1)-(5)\cdot(4)\cdot(-8)=$$
$$=168+100-28-84-35+160=281.$$

Portanto, o valor do determinante é $\det(A)=281$.

■

**Exemplo 2.3.5** *Prove que:* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix}=0.$

**Solução:** Temos que

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r-1\cdot 1 & r^2-1\cdot 1 & r^3-1\cdot 1 \\ r^2-1\cdot 1 & r^3-1\cdot 1 & r^4-1\cdot 1 \\ r^3-1\cdot 1 & r^4-1\cdot 1 & r^5-1\cdot 1 \end{vmatrix}=$$

$$= \left| \begin{array}{ccc:cc} r-1 & r^2-1 & r^3-1 & r-1 & r^2-1 \\ r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 & r^2-1 & r^3-1 \\ r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 & r^3-1 & r^4-1 \end{array} \right| =$$

$$= (r-1)(r^3-1)(r^5-1) + (r^2-1)(r^4-1)(r^3-1) + (r^2-1)(r^4-1)(r^3-1) -$$

$$-(r^3-1)(r^3-1)(r^3-1) - (r^2-1)(r^2-1)(r^5-1) - (r^4-1)(r^4-1)(r-1) =$$

$$= (r-1)^3[1\cdot(r^2+r+1)(r^4+r^3+r^2+r+1)] + (r-1)^3[(r+1)(r^3+r^2+r+1)(r^2+r+1)] +$$

$$+(r-1)^3[(r+1)(r^3+r^2+r+1)(r^2+r+1)] - (r-1)^3[(r^2+r+1)(r^2+r+1)(r^2+r+1)] -$$

$$-(r-1)^3[(r+1)(r+1)(r^4+r^3+r^2+r+1)] - (r-1)^3[(r^3+r^2+r+1)(r^3+r^2+r+1)\cdot 1] =$$

$$= (r-1)^3[(r^6+2r^5+3r^4+3r^3+3r^2+2r+1) + 2(r^6+3r^5+5r^4+6r^3+5r^2+3r+1)] -$$

$$-(r-1)^3\Big[(r^6+3r^5+6r^4+7r^3+6r^2+3r+1) + (r^6+3r^5+4r^4+4r^3+4r^2+3r+1) +$$

$$+(r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1)\Big] =$$

$$= (r-1)^3[3r^6+8r^5+13r^4+15r^3+13r^2+8r+3] -$$

$$-(r-1)^3(3r^6+8r^5+13r^4+15r^3+13r^2+8r+3) = 0.$$

Portanto, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix} = 0.$ ■

Agora apresentaremos o *Teorema de Laplace*[3], que é um dos métodos mais conhecidos e utilizados no cálculo de determinantes.

## Teorema de Laplace

Para enunciarmos e provarmos o Teorema de Laplace, precisamos de alguns conceitos ainda não apresentados nessas notas. Vamos iniciar apresentando, então, a definição do *Menor Complementar*.

**Definição 2.3.1** *Considere uma matriz $A = (a_{ij})_n$ de ordem $n \geq 2$. Definimos por* ***Menor Complementar*** *do elemento $a_{ij}$, e indicamos por $D_{ij}$, o valor do determinante da matriz de ordem $n-1$ que obtemos ao excluirmos a linha $i$ e a coluna $j$ da matriz $A$.*

■

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.3.6** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$*, então:*

[3] Pierre-Simon Laplace, (1749-1827) foi um matemático, astrônomo e físico francês. Autor da obra prima “Mécanique Céleste” (1799-1825) traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física. Ele também formulou a Equação e a Transformada de Laplace, entre outras contribuições, aparece em todos os ramos da física matemática.

- *o menor complementar $D_{11}$ é obtido calculando o determinante de ordem 2 da matriz que obtemos de $A$ excluindo a linha 1 e a coluna 1, ou seja,*

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13;$$

- *o menor complementar $D_{21}$ é obtido calculando o determinante de ordem 2 da matriz que obtemos de $A$ excluindo a linha 2 e a coluna 1, ou seja,*

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 6 - 12 = -6;$$

- *o menor complementar $D_{31}$ é obtido calculando o determinante de ordem 2 da matriz que obtemos de $A$ excluindo a linha 3 e a coluna 1, ou seja,*

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 15 - 4 = 11.$$

■

Conhecendo o menor complementar podemos defini o que chamamos de *Cofator*.

**Definição 2.3.2** *Seja $A = (a_{ij})_m$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. Chamamos de **Complementar Algébrico** de $a_{ij}$ ou simplesmente de **Cofator**, ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, onde $D_{ij}$ é o menor complementar do elemento $a_{ij}$.*

■

Vamos aos exemplos.

**Exemplo 2.3.7** *Sendo* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, *então:*

- *o cofator $A_{11}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+1} = (-1)^2$ ao menor complementar $D_{11}$, ou seja,*

$$A_{11} = (-1)^2 D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1;$$

- *o cofator $A_{12}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+2} = (-1)^3$ ao menor complementar $D_{12}$, ou seja,*

$$A_{12} = (-1)^3 D_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -[(-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 0] = -[4 - 0] = -4;$$

- *o cofator $A_{13}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+3} = (-1)^4$ ao menor complementar $D_{13}$, ou seja,*

$$A_{13} = (-1)^4 D_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 1 - (-1)\cdot 0] = -2 - 0 = -2.$$

■

Como podemos calcular o cofator de cada um dos elementos de uma matriz $A$, então, podemos construir uma matriz com esses elementos. Essa é a chamada *Matriz dos Cofatores*, que é apresentada a seguir.

**Definição 2.3.3** *Seja $A = (a_{ij})_m$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. Chamamos de* ***Matriz dos Cofatores*** *de $A$ a nova matriz $C = (A_{ij})_n$, onde cada $A_{ij}$ é o cofator do elemento $a_{ij}$ de $A$.*

■

Lembre-se, para falarmos de cofatores, precisamos de uma matriz $A$ associada a eles. Agora, vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.3.8** *Obtenha a matriz dos cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.*

**Solução:** Precisamos calcular o cofator de todos os elementos da matriz $A$ para construirmos a matriz dos cofatores. Assim,

- o cofator $A_{11}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+1} = (-1)^2$ ao menor complementar $D_{11}$, ou seja,

$$A_{11} = (-1)^2 D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} = -4;$$

- o cofator $A_{12}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+2} = (-1)^3$ ao menor complementar $D_{12}$, ou seja,

$$A_{12} = (-1)^3 D_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = -3;$$

- o cofator $A_{21}$ é obtido multiplicando $(-1)^{2+1} = (-1)^3$ ao menor complementar $D_{21}$, ou seja,

$$A_{21} = (-1)^3 D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1;$$

- o cofator $A_{22}$ é obtido multiplicando $(-1)^{2+2} = (-1)^4$ ao menor complementar $D_{22}$, ou seja,

$$A_{22} = (-1)^4 D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Portanto, a matriz dos cofatores da matriz $A$ é dada por

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

**Exemplo 2.3.9** *Obtenha a matriz dos cofatores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

**Solução:** Precisamos calcular o cofator de todos os elementos da matriz $A$ para construirmos a matriz dos cofatores. Assim,

- o cofator $A_{11}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+1} = (-1)^2$ ao menor complementar $D_{11}$, ou seja,

$$A_{11} = (-1)^2 D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 1 + 4 = 5;$$

- o cofator $A_{12}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+2} = (-1)^3$ ao menor complementar $D_{12}$, ou seja,

$$A_{12} = (-1)^3 D_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0] = -[1 - 0] = -1;$$

- o cofator $A_{13}$ é obtido multiplicando $(-1)^{1+3} = (-1)^4$ ao menor complementar $D_{13}$, ou seja,

$$A_{13} = (-1)^4 D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2 - 0 = 2;$$

- o cofator $A_{21}$ é obtido multiplicando $(-1)^{2+1} = (-1)^3$ ao menor complementar $D_{21}$, ou seja,

$$A_{21} = (-1)^3 D_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -[0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2] = -[0 + 2] = -2;$$

- o cofator $A_{22}$ é obtido multiplicando $(-1)^{2+2} = (-1)^4$ ao menor complementar $D_{22}$, ou seja,

$$A_{22} = (-1)^4 D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 3 - 0 = 3;$$

- o cofator $A_{23}$ é obtido multiplicando $(-1)^{2+3} = (-1)^5$ ao menor complementar $D_{23}$, ou seja,

$$A_{23} = (-1)^5 D_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -[3\cdot 2 - 0\cdot 0] = -[6-0] = -6;$$

- o cofator $A_{31}$ é obtido multiplicando $(-1)^{3+1} = (-1)^4$ ao menor complementar $D_{31}$, ou seja,

$$A_{31} = (-1)^4 D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-2) - (-1)\cdot 1 = 0+1 = 1;$$

- o cofator $A_{32}$ é obtido multiplicando $(-1)^{3+2} = (-1)^5$ ao menor complementar $D_{32}$, ou seja,

$$A_{32} = (-1)^5 D_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -[3\cdot(-2) - (-1)\cdot 1] = -[-6+1] = 5;$$

- o cofator $A_{33}$ é obtido multiplicando $(-1)^{3+3} = (-1)^6$ ao menor complementar $D_{33}$, ou seja,

$$A_{33} = (-1)^6 D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 0\cdot 1 = 3-0 = 3.$$

Portanto, a matriz dos cofatores da matriz $A$ é dada por

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Agora vamos enunciar o Teorema de Laplace.

**Teorema 2.3.1** *Seja $A = (a_{ij})_m$ uma matriz de ordem $n \geq 2$. Então, o determinante da matriz $A$ é igual a soma algébrica dos produtos de uma fila (uma linha ou uma coluna) pelos seus respectivos cofatores.*

**Demonstração:** Vamos adiar a demonstração por um momento, primeiro vamos ver umas aplicações do teorema. ■

**Exemplo 2.3.10** *Use o Teorema de Laplace para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

**Solução:**

a) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, escolhendo a linha 1, temos que

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13}.$$

Como

- $$A_{11} = (-1)^2 D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot 9 - 6\cdot 8 = 45 - 48 = -3;$$

- $$A_{12} = (-1)^3 D_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -[4\cdot 9 - 6\cdot 7] = -[36 - 42] = 6;$$

- $$A_{13} = (-1)^4 D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot 8 - 5\cdot 7 = 32 - 35 = -3;$$

segue que $\det(A) = -3 + 2\cdot 6 + 3\cdot(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$. Portanto, $\det(A) = 0$.

b) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, como a segunda coluna possui dois elementos valendo zero, usaremos essa coluna para calcular o determinante. Assim,

$$\det(A) = 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{22} + 2\cdot A_{32} + 4\cdot A_{42} = 2\cdot A_{32} + 4\cdot A_{42}.$$

Observe que

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\left|\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right| =$$

$$= -(0 + 18 - 12 + 12 - 18 - 0) = 0 \text{ e}$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -12 + 18 - 12 + 12 - 18 + 12 = 0,$$

segue que $\det(A) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$. Portanto, $\det(A) = 0$.

c) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, como a terceira linha possui três elementos valendo zero, usaremos essa linha para calcular o determinante. Assim,

$$\det(A) = 0 \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = 2 \cdot A_{32}.$$

Assim,

$$\det(A) = 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \left\{ 5(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right\} = 10 \cdot (-2 - 1) = -30.$$

Portanto, $\det(A) = -30$.

■

**Observação 2.3.1** *Como o teorema de Laplace multiplica todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) pelo seu cofator, uma boa utilização desse método é sempre escolher filas com o maior número de zeros, diminuindo o número de cofatores que precisamos calcular.*

■

Para facilitar a demonstração do Teorema de Laplace, primeiro vamos provar que o valor do determinante de uma matriz é igual ao valor do determinante da sua transposta. Com isso, provando o teorema de Laplace sobre as linhas, podemos considerar válido para todas as matrizes, visto que se escolhermos uma coluna é como se escolhêssemos a linha da sua transposta. Antes, vamos a uma observação relacionada a propriedades de permutações.

**Observação 2.3.2** *Seja $S_n$ o conjuntos das permutações do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ e seja $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in S_n$ uma permutação fixada. Observe que para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ existe um único $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $j = p_i$ e, consequentemente, $i = p_j^{-1}$, ou seja, podemos assumir a permutação inversa. Por essa razão,*

$$a_{1p_1} a_{2p_2} (\cdots) a_{np_n} = a_{p_1^{-1}1} a_{p_2^{-1}2} (\cdots) a_{p_n^{-1}n}.$$

*Além disso, é possível provar que a paridade de $(p_1^{-1}, p_2^{-1}, \cdots, p_n^{-1})$ é a mesma de $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$.*

■

Vamos ao teorema.

**Teorema 2.3.2** *Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz. Então, temos que* $\det(A^T)=\det(A)$.

**Demonstração:** Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz. Então, sendo $S_n$ o conjuntos das permutações do conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$ e $(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in S_n$, temos que

$$\det(A^T)=\sum_{S_n}(-1)^P a_{p_1 1}a_{p_2 2}(\cdots)a_{p_n n}=\sum_{S_n}(-1)^P a_{1p_1^{-1}}a_{2p_2^{-1}}(\cdots)a_{np_n^{-1}}=$$

$$=\sum_{S_n}(-1)^{P^{-1}} a_{p_1^{-1}1}a_{p_2^{-1}2}(\cdots)a_{p_n^{-1}n}=\sum_{S_n}(-1)^Q a_{1q_1}a_{2q_2}(\cdots)a_{nq_n}=\det(A).$$

■

O teorema anterior nos diz que $\det(A^T)=\det(A)$, para qualquer matriz $A=(a_{ij})_n$. Consequentemente, qualquer proposição que seja demonstrada para linha, também vale para coluna, visto que a transposta de uma matriz torna linha coluna e vice e versa. Vamos agora demonstrar o Teorema de Laplace. Uma forma de provar esse resultado é usando recorrência. Contudo, optamos por uma abordagem mais direta.

## Demonstração do Teorema de Laplace

**Demonstração:** Seja $A=(a_{ij})_n$ uma matriz. Pela definição de determinantes, temos que

$$\det(A)=\sum_{S_n}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}(\cdots)a_{np_n},$$

onde $S_n$ é o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$. Sem perda de generalidade, considere os elementos da linha 1. Assim, tomando todos os termos dessa soma que possui o elemento $a_{11}$ no produto e o colocando em evidência obtemos:

$$a_{11}C_1=a_{11}\sum_{p_k\neq 1}(-1)^P a_{2p_2}a_{3p_3}(\cdots)a_{np_n}\Rightarrow C_1=\sum_{p_k\neq 1}(-1)^P a_{2p_2}a_{3p_3}(\cdots)a_{np_n}.$$

De forma análoga, tomando todos os termos dessa soma que possui o elemento $a_{12}$ no produto e o colocando em evidência obtermos:

$$a_{12}C_2=-a_{12}\sum_{p_k\neq 2}(-1)^P a_{2p_2}a_{3p_3}(\cdots)a_{np_n}\Rightarrow C_2=-\sum_{p_k\neq 2}(-1)^P a_{2p_2}a_{3p_3}(\cdots)a_{np_n},$$

onde o sinal de menos aprece pois o elemento $p_k=1(k\neq 1)$ vai aparecer a direita de $p_1=2$, em todas as permutações e, portanto. todas essas permutações possuem sinal inverso em relação a que colocamos $a_{11}$ em evidência.

Analogamente, tomando todos os termos da soma do determinantes que possui $a_{13}$ no produto, e o colocando em evidência, obtemos:

$$a_{13}C_3=+a_{13}\sum_{p_k\neq 3}(-1)^P a_{2p_2}a_{3p_3}(\cdots)a_{np_n}\Rightarrow C_3=\sum_{p_k\neq 2}(-1)^P a_{2p_2}a_{3p_3}(\cdots)a_{np_n},$$

onde o sinal de mais aprece pois os elementos $p_k = 1 (k \neq 1)$ e $p_s = 2(s \neq 1)$ vão aparecer a direita de $p_1 = 3$, em todas as permutações e, portanto, todas essas permutações possuem o mesmo sinal em relação a que colocamos $a_{11}$ em evidência e assim por diante. Ou seja, repetindo a ideia até $n$, temos que:

$$a_{1n}C_n = (-1)^{1+j} a_{1n} \sum_{p_k \neq n} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} \Rightarrow C_n = (-1)^{1+j} \sum_{p_k \neq n} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n},$$

onde o sinal vai ser $(-1)^{1+j}$, relacionado ao elemento $a_{1j}$ que colocamos em evidência. Consequentemente,

$$\det(A) = \sum_{S_n} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} (\cdots) a_{np_n} = a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + \cdots + a_{1n}C_n.$$

Observe que se tivermos $A_{1j} = C_j$, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então, o Teorema de Laplace fica provado. Temos que o menor complementar $D_{1j}$ é um determinante de uma matriz de ordem $n-1$, onde excluímos de $A$ linha 1 e a coluna 1, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Assim, temos que

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_k \neq 1} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \sum_{p_k \neq 1} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} = C_1.$$

Por outro lado, temos que

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_k \neq 2} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \sum_{p_k \neq 2} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} = C_2.$$

Prosseguindo, temos que

$$D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \sum_{p_k \neq 3} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{13} = \sum_{p_k \neq 3} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} = C_3,$$

e assim por diante. De uma forma geral,

$$D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_k \neq j} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{1j} = (-1)^{1+j} \sum_{p_k \neq j} (-1)^P a_{2p_2} a_{3p_3} (\cdots) a_{np_n} = C_j,$$

terminando a demonstração do teorema para a primeira linha. Como a argumentação aqui apresentada para a linha um pode ser aplicada a qualquer outra linha repetindo a argumentação anterior, podemos concluir que o Teorema vale para quaisquer fila. ■

Agora vamos apresentar o *Teorema de Jacobi*[4]. A ideia desse teorema é ajudar a obter matrizes mais simples, com o mesmo valor do determinante da matriz original.

## Teorema de Jacobi

**Teorema 2.3.3** *Seja $A = (a_{ij})_n$ uma matriz quadrada. Seja $B = (b_{ij})_n$ uma matriz obtida de $A$, trocando uma de suas filas por ela somada a um múltiplo de outra fila paralela a ela. Nessa condições, temos que* $\det(B) = \det(A)$.

**Demonstração:** A demonstração desse teorema será feita na próxima seção. ■

Vamos a algumas aplicações.

**Exemplo 2.3.11** *Use o Teorema de Jacobi para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

**Solução:**

a) Temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 - 49 = -56.$$

Portanto, $\det(A) = -56$.

b) Temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

[4] Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) foi um matemático alemão, que fez contribuições fundamentais para funções elípticas, dinâmica, equações diferenciais e teoria dos números. Jacobi foi o primeiro matemático judeu a ser nomeado professor em uma universidade alemã.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 16 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & -3 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 16 \\ -3 & 31 \end{vmatrix} = 0-(-48) = 48.$$

Portanto, $\det(A) = 48$.

c) Temos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 5 & 18 & 29 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 5 & 18 & 29 \\ 0 & 5 & 26 & 40 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 5 & 18 & 29 \\ 0 & 5 & 26 & 40 \\ 0 & 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 18 & 29 \\ 5 & 26 & 40 \\ 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 18 & 29 \\ 0 & 8 & 11 \\ 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ -9 & -24 \end{vmatrix} = 5(-192+99) = -465.$$

Portanto, $\det(A) = -465$.

■

Para finalizarmos essa seção, vamos apresentar a *Matriz de Vandermonde*[5] e uma forma prática de se calcular o determinante para esse tipo de matriz.

**Definição 2.3.4** *A **Matriz de Vandermonde** é qualquer matriz em que os termos de cada fila estão em progressão geométrica.*

■

De uma forma geral, uma matriz de Vandermonde de ordem $m \times n$ fica dada por

$$V = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \cdots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \cdots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_m & q_m^2 & \cdots & q_m^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos ao resultado que nos permitirá calcular o valor do determinante de uma matriz de Vandermonde.

[5] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) foi um matemático, músico e químico francês. Ele iniciou na matemática em 1770. O seu nome está associado principalmente com o determinante, mas ele foi um violinista, e trabalho com funções simétrica e a solução de polinômios ciclotômicos.

**Teorema 2.3.4** *Seja $V = (a_{ij})_n$ uma matriz de Vandermonde quadrada. Então, o valor do determinante dessa matriz é dado por*

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i).$$

**Demonstração:** A demonstração desse teorema será feita na próxima seção. ■

Vamos aos exemplos.

**Exemplo 2.3.12** *Use o Teorema de Vandermonde para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & (\ln 2)^2 \\ 1 & \ln 6 & (\ln 6)^2 \\ 1 & \ln 12 & (\ln 12)^2 \end{vmatrix}$;

*d)* $\begin{vmatrix} 1 & \log_{10} 2 & (\log_{10} 2)^2 & (\log_{10} 2)^3 \\ 1 & (\log_{10} 20) & (\log_{10} 20)^2 & (\log_{10} 20)^3 \\ 1 & (\log_{10} 200) & (\log_{10} 200)^2 & (\log_{10} 200)^3 \\ 1 & (\log_{10} 2000) & (\log_{10} 2000)^2 & (\log_{10} 2000)^3 \end{vmatrix}$.

**Solução:**

a) Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde. Dessa forma,

$$\det(A) = (6-5)(7-6)(7-5) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Portanto, $\det(A) = 2$.

b) Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde. Dessa forma,

$$\det(A) = (3-5)(2-3)(2-5)(4-2)(4-3)(4-5) = (-2)\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(2)\cdot(1)\cdot(-1) = 12.$$

Portanto, $\det(A) = 12$.

c) Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & \ln 2 & (\ln 2)^2 \\ 1 & \ln 6 & (\ln 6)^2 \\ 1 & \ln 12 & (\ln 12)^2 \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde. Dessa forma,

$$\det(A) = (\ln 6 - \ln 2)(\ln 12 - \ln 6)(\ln 12 - \ln 2) = \ln 3 \cdot \ln 2 \cdot \ln 6.$$

Portanto, $\det(A) = \ln 3 \cdot \ln 2 \cdot \ln 6$.

d) Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & \log_{10} 2 & (\log_{10} 2)^2 & (\log_{10} 2)^3 \\ 1 & (\log_{10} 20) & (\log_{10} 20)^2 & (\log_{10} 20)^3 \\ 1 & (\log_{10} 200) & (\log_{10} 200)^2 & (\log_{10} 200)^3 \\ 1 & (\log_{10} 2000) & (\log_{10} 2000)^2 & (\log_{10} 2000)^3 \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde. Dessa forma,

$$\det(A) = (\log_{10} 20 - \log_{10} 2) \cdot (\log_{10} 200 - \log_{10} 20) \cdot (\log_{10} 200 - \log_{10} 2) \cdot$$
$$\cdot (\log_{10} 2000 - \log_{10} 200) \cdot (\log_{10} 2000 - \log_{10} 20) \cdot (\log_{10} 2000 - \log_{10} 2) =$$
$$= (\log_{10} 10) \cdot (\log_{10} 10) \cdot (\log_{10} 100) \cdot (\log_{10} 10) \cdot (\log_{10} 100) \cdot (\log_{10} 1000) =$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Portanto, $\det(A) = 12$.

■

**Exemplo 2.3.13** *Resolva a equação* $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 49 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

**Solução:** Temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 49 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde. Dessa forma,

$$\det(A) = (-5-7)(x-(-5))(x-7) \Rightarrow -12(x+5)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = 7.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $\{-5, 7\}$. ■

Agora, faça alguns exercícios para fixar o conteúdo. Bons estudos.

## 2.4 Exercícios

**Exercício 2.4.1** *Use o Teorema de Sarrus para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; *e)* $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$;

*b)* $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; *d)* $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; *f)* $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 8 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

**Exercício 2.4.2** *Use o Teorema de Chiò para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$;

*b)* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \text{sen}(x) & \cos(x) & -1 \\ 2 & -\cos(x) & \text{sen}(x) & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

**Exercício 2.4.3** *Obtenha a matriz dos cofatores de cada uma das matrizes a seguir.*

*a)* $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$; *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \end{bmatrix}$.

**Exercício 2.4.4** *Use o Teorema de Laplace para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; *e)* $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$;

*b)* $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; *d)* $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

**Exercício 2.4.5** *Obtenha o valor de $x$ para que a desigualdade* $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$ *seja sempre verdadeira.*

**Exercício 2.4.6** *Use o Teorema de Jacobi para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 4 & 20 & -5 \\ 3 & 5 & -9 \end{vmatrix}$; *c)* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$; *e)* $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

*b)* $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -3 \\ 6 & 15 & -4 & -3 \\ 12 & 5 & 6 & -11 \\ -3 & -3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; *d)* $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; *f)* $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix}$.

**Exercício 2.4.7** *Use o Teorema de Vandermonde para calcular o valor de cada um dos determinantes a seguir.*

*a)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 16 & 9 & 4 \end{vmatrix}$;

*b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & 9 & 9 \\ 8 & -8 & 27 & -27 \end{vmatrix}$;

*c)* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

*d)* $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{36} & \frac{1}{216} \end{vmatrix}$;

*e)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & \pi & 4 \\ e^2 & \pi^2 & 16 \end{vmatrix}$;

*f)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 25 & 4 & 9 \\ -8 & -1 & 125 & 8 & -27 \\ 16 & 1 & 625 & 16 & 81 \end{vmatrix}$.