Capítulo 2

Números Naturais

2.1 Introdução

Números formam um dos objetos principais que se ocupa a Matemática. Números são entes abstratos, desenvolvidos como modelo que permitem contar ou medir e, com isto, é possível avaliar as quantidades de uma grandeza.

Os Compêndios[1] tradicionais dizem que: "Número é o resultado da comparação entre grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se *contagem* e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real."

A definição para número apresentada anteriormente não é útil para as futuras demonstrações, mas a mesma ajuda a entender o "por que" e o "para que" os números foram criados, diferente de algumas definições que aparecem nos dicionários como, por exemplo, "Número: Do lat. *numeru*. S.m. 1 Mat. O conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado."

Na matemática utiliza-se um conjunto de proposições cuja nomenclatura é estabelecida a seguir.

- *Conceitos Primitivos*: São objetos que não se definem, mas cujo sentido é entendido por todos. Exemplos:
  - Pontos;
  - Retas;
  - Conjuntos;
  - Números naturais;
  - Etc.
- *Definição*: É uma convenção que consiste usar um nome, ou uma sentença breve, para designar um objeto ou uma propriedade. Exemplos:

[1]Tratado resumido sobre uma ciência, teoria, disciplina etc.; Livro, em geral utilizado em escolas, que reúne resumos de uma ciência, teoria etc., FIG Coisa ou pessoa que reúne em si características de uma época.

- *Ângulo*: é a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.
- *Tapézio*: é um quadrilátero convexo que possui um par de lados opostos paralelos.
- *Primos entre si*: são dois ou mais números naturais cujo o único divisor comum é a unidade.

- *Axiomas* (ou *Postulados*): é um conjunto de princípios ou regras que não são demonstrados. Os axiomas devem ser simples e inquestionáveis. Exemplos:
  - Por um ponto dado passam infinitas retas.
  - Todo número inteiro possui um sucessor.
  - Existem infinitos planos no espaço.

Estabelecidos os conceitos primitivos e enunciado os axiomas de uma teoria matemática, todas as demais noções dever ser definidas e as afirmações seguintes devem ser demonstradas, estabelecendo o chamado *Método Axiomático*. Estas afirmações a serem demonstradas também recebem nomenclatura própria:

- Teorema: Proposições que devem ser demonstradas. Dependendo do conjunto de axiomas utilizado, uma sentença que é um teorema numa teoria passa a ser axioma em outra e vice e versa. Exemplos:
  - (Teorema de Pitágoras): Se $a \leq b < c$ é um triângulo retângulo, então, $c^2 = a^2 + b^2$.
  - (Teorema de Tales): Se a, b e c são retas paralelas e as retas r e s são retas transversais, tais que $r \cap a = A$, $r \cap b = B$, $r \cap c = C$, $s \cap a = A'$, $s \cap b = B'$ e $s \cap c = C'$, então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

- *Corolário*: é uma proposição que é uma consequência imediata de um teorema. Exemplo:
  - Se ABC é um triângulo retângulo equilátero, então,

$$hipotenusa = cateto\sqrt{2}.$$

  - Seja ABC um triângulo e M o ponto médio do lado AB. Se a reta r que contém o segmento MN $(N \in AC)$ é paralela a reta s que contém o segmento de reta BC, então, o ponto N é o ponto médio de AC.

- *Lema*: Proposições auxiliares usadas na demonstração de outros teoremas.

Não é recomendado expor a matemática no ensino básico de maneira axiomática. Contudo, deve existir um equilíbrio, ou seja, não deve-se deixar de fazer uma explicação correta com o pretexto de "falta de maturidade", mas também não é necessário ficar justificando afirmações intuitivamente óbvias para não gerar um ensino "tedioso". Porém, resultados importantes, cuja vericidade não seja óbvia devem ser demonstrados, desde que não sejam muito longas e não usem noções e resultados acima do alcance do estudantes nesse nível.

2.2 O Conjunto dos Números Naturais - $\mathbb{N}$

Definição 2.2.1 *$\mathbb{N}$ é o conjunto cujos elementos são chamados de números naturais.*

A essência da caracterização do conjunto $\mathbb{N}$ está relacionada com a palavra "sucessor", ou seja, se n' é o sucessor de n, então, n' é o primeiro número natural depois de n, não existindo outro número natural entre n e n'. Para o conjunto $\mathbb{N}$ é definido um conjunto de axiomas, chamados de Axiomas de Peano, que são enunciados a seguir.

Axioma 2.2.1 *(Axiomas de Peano):*

1. *Todo número natural tem um sucessor.*
2. *Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.*
3. *Existe um único número natural chamado de um, e representado por* 1, *que não é o sucessor de nenhum outro número natural.*
4. *Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de $x \in X$ também é elemento de X, então, $X = \mathbb{N}$.*

Uma consequência dos axiomas de Peano é que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Definição 2.2.2 *Se b é o sucessor de a, então, a é chamado de antecessor de b.*

Assim, todo número natural diferente de 1 tem um único antecessor. O número 1 não possui antecessor.

O último axioma de Peano é conhecido como o Axioma da Indução, sendo ele a base das demonstrações por indução ou recorrência. Reescrevendo o axioma da indução por propriedades, tem-se:

Princípio da Indução

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha que:

1. $P(1)$ é válida.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica na validez $P(n')$, sendo n' o sucessor de n,

então, $P(n)$ é válida para todo número natural n.

2.3 Adição e Multiplicação em $\mathbb{N}$

No conjunto dos números naturais é definida duas operações fundamentais: a *adição*, que associa os números $a, b \in \mathbb{N}$ à soma $a+b$ e a *multiplicação*, que associa os números $a, b \in \mathbb{N}$ ao produto ab.

A soma $a+b$ é o número natural que se obtém a partir de a aplicando-se b vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Por isso, $a+1$ é o sucessor de a, $a+2$ é o sucessor de $a+1$, e assim por diante. De agora em diante, o sucessor de n será denotado por $n+1$. Para o produto, toma-se $a.1 = a$, por definição e, para $b \neq 1$, ab é a soma de b parcelas iguais de a.

As operações de adição e multiplicação são definidas por indução, como apresentada a seguir.

Definição 2.3.1 *Para todos os números naturais m e n tem-se que:*

- *Adição: $m + (n+1) = (m+n) + 1$;*
- *Multiplicação: $m(n+1) = mn + n$.*

Teorema 2.3.1 *Sejam a, b e c números naturais. Então, para a operação de adição valem as seguintes propriedades:*

1. *associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$;*
2. *comutativa: $a+b = b+a$;*
3. *lei do corte: $a+c = b+c \Rightarrow a = b$.*

Demonstração:

1. Do primeiro item da Definição 2.3.1, segue que $(a+b)+1 = a+(b+1)$ e, por isso, a propriedade é válida para 1. Suponha agora e a propriedade seja válida para c, ou seja, $(a+b)+c = a+(b+c)$. Então, para o sucessor de c, tem-se que:

$$(a+b)+(c+1) = ((a+b)+c)+1 \text{ (pela definição)}$$

$$((a+b)+c)+1 = (a+(b+c))+1 \text{ (hpótese de indução)}$$

$$(a+(b+c))+1 = a+((b+c)+1) \text{ (pela definição)}$$

$$a+((b+c)+1) = a+(b+(c+1)) \text{ (pela definição)},$$

portanto, como é válida para $c = 1$ e, supondo ser válida para c, ela também é válida para o sucessor c, segue do princípio da indução, que a propriedade é válida para todo c, isto é, $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. Para provar a comutatividade é preciso demonstrar primeiro que vale $a+1 = 1+a$, para todo $a \in \mathbb{N}$, o que será feito por indução.

   Para $a = 1$, seque que $1+1 = 1+1$ e, por isso, a propriedade vale quando $a = 1$. Suponha, pela hipótese de indução, que a propriedade é válida para a, ou seja, $a + 1 = 1 + a$. Assim, para o sucessor de a segue que

$$1 + (a + 1) = (1 + a) + 1 \text{ (associatividade)}$$

$$(1 + a) + 1 = (a + 1) + 1 \text{ (hipótese de indução)}$$
$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 \text{ (vale para 1)}$$
$$(1 + a) + 1 = 1 + (a + 1) \text{ (associatividade)},$$

portanto, como a propriedade é válida para $a = 1$ e, supondo que ela é válida para a, ela também vale para o seu sucessor, segue do princípio da indução, que $a + 1 = 1 + a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

Agora, é preciso provar o caso geral: suponha, pela hipótese de indução, que $a + b = b + a$. Assim, para o sucessor de b, segue que

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \text{ (associatividade)}$$

$$(a + b) + 1 = (b + a) + 1 \text{ (hipótese de indução)}$$
$$(b + a) + 1 = b + (a + 1) \text{ (associatividade)}$$
$$b + (a + 1) = b + (1 + a) \text{ (vale para 1)}$$
$$b + (1 + a) = (b + 1) + a \text{ (associatividade)},$$

e, por isso, a propriedade vale para o sucessor de b. Portanto, como a propriedade é válida para $b = 1$ e, supondo que ela vale para b, a propriedade também é válida para o sucessor b, segue do princípio da indução, que a propriedade é válida para todo b, isto é, $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$.

3. Para a lei do corte, sabendo que $a + 1$ é o sucessor de a, $b + 1$ é o sucessor de b, e como $a + 1 = b + 1$, segue que $a = b$, pois números naturais com os mesmos sucessores são iguais. Portanto, a propriedade é válida para $c = 1$, isto é,

$$a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b.$$

Agora, suponha que seja válido para c, ou seja, $a + c = b + c \Rightarrow a = b$. Então, para o sucessor de c, segue que:

$$a + (c + 1) = b + (c + 1) = (a + c) + 1 = (b + c) + 1 \text{ pela associatividade}$$

$$(a + c) + 1 = (b + c) + 1 \Rightarrow a + c = b + c \Rightarrow a = c,$$

sendo que a primeira aplicação é devida a validade para $c = 1$ e a segunda implicação é devido a hipótese de indução. Portanto, como a lei do corte é válida para $c = 1$ e supondo que é válida para c também é válida para o sucessor de c, segue que a lei do corte vale para todo $c \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 2.3.2 *Sejam a, b e c números naturais. Então, para a operação de multiplicação valem as seguintes propriedades:*

1. *associativa:* $(a.b).c = a.(b.c)$;
2. *comutativa:* $a.b = b.a$;
3. *distributiva em relação à adição:* $a.(b + c) = ab + ac$.

Demonstração: Exercício. □

2.4 Ordem entre números naturais

Agora vai ser apresentado a relação de Ordem no conjunto dos números naturais.

Definição 2.4.1 *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, diz-se que a é menor do que b, e escreve-se $a < b$, se existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + c$.*

Teorema 2.4.1 *A relação de ordem tem as seguintes propriedades, sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$:*

1. *transitividade: se $a < b$ e $b < c$, então, $a < c$;*
2. *tricotomia: vale uma, e somente uma, das alternativas: $a = b$, $a < b$ ou $a > b$;*
3. *monotonicidade: se $a < c$, então, $a + c < b + c$ e $ac < bc$.*

Demonstração: Exercício. □

Teorema 2.4.2 ***(Princípio da Boa Ordenação**:) Todo subconjunto X não vazio de números naturais possui um menor elemento.*

Demonstração: Seja $X \subset \mathbb{N}$ com $X \neq \varnothing$. Considere $A = \{x \in \mathbb{N} | x \notin X\}$. Se $A = \varnothing$, tem-se que $1 \in X$, logo X tem um menor elemento. Por outro lado, se $A \neq \varnothing$, segue que $X \neq \mathbb{N}$. Assim, existe $a \in A$ tal que $a + 1 \in X$, pois caso contrário $A = \mathbb{N}$ (pelo princípio da indução), o que seria uma contradição, visto que $X \neq \varnothing$.

Assim, tomando $b = a + 1$, segue que b é o menor elemento de X se $x \in A$, para todo $x < b$. Caso contrário, existem $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < b$ números inteiros tais que $a_i \in X$. Nesse caso, a_1 é o menor elemento de X. Portanto, $X \subset \mathbb{N}$, com $X \neq \varnothing$, possui um menor elemento. □

Exemplo 2.4.1 *Prove que* $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Solução: Primeiro é preciso mostrar que a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Assim, como $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$, segue que a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Agora, suponha que a afirmação é verdadeira para o número n (hipótese de indução), isto é, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Então, para o sucessor de n tem-se que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},$$

e, por isto, a afirmação é verdadeira para o sucessor de n. Portanto, como a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e, supondo que a afirmação é válida para n, ela também é válida para o seu sucessor, segue do princípio de indução que a afirmação é verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 2.4.2 *Prove que* $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Solução: Para $n = 1$, tem-se que $1 = 1^2$ e, por isso, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Agora, suponha que a afirmação é verdadeira para o número n (hipótese de indução), isto é, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Então, para o sucessor de n tem-se que:

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

e, por isto, a afirmação é verdadeira para o sucessor de n. Portanto, como a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e, supondo que a afirmação é válida para n, ela também é válida para o seu sucessor, segue do princípio de indução que a afirmação é verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 2.4.3 *Todo número natural é um número primo ou um produto de fatores primos.*

Solução: Suponha, por absurdo, que o conjunto X dos números primos ou que é o produto de fatores primos não é igual a $\mathbb{N}$. Seja $Y = X^C$, logo $Y \neq \varnothing$. Assim, existe um número $a \in Y$ que é o menor elemento de Y, pelo princípio da boa ordenação e, consequentemente, $x < a$, para todo $x \in X$. Como a não é primo, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $a = mn$. Como $m < a$ e $n < a$, segue que $m, n \in X$ e, por isso, $a = mn \in X$, o que é um absurdo.

Como o absurdo surge pelo fato de supor que o conjunto X dos números primos ou que é o produto de fatores primos não é igual a $\mathbb{N}$, segue que vale a proposição. $\square$

Estabelecida a noção de ordem é possível definir a relação $\leq$, como a seguir.

Definição 2.4.2 *Um número a é dito ser menor do que ou igual a b, e escreve-se $a \leq b$, se $a < b$ ou $a = b$. Um número b é dito ser maior do que um número a, e escreve-se $b > a$, se $a < b$. Um número b é dito ser maior do que ou igual a a, e escreve-se $b \geq a$, se $b > a$ ou $b = a$. Um número a é dito ser diferente de b, e escreve-se $a \neq b$, se $a < b$ ou $a > b$.*

Definição 2.4.3 *Seja $a, m \in \mathbb{N}$. A potência de base a e expoente n, denotada por a^n, é o número obtido multiplicando o número a por ele mesmo n vezes, ou seja,*

$$a^n = \underbrace{a.a.\cdots.a}_{n \text{ vezes}}.$$

Exemplo 2.4.4 *Prove que $1 + n \leq 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Solução: Para $n = 1$, segue que $1 + 1 \leq 2.1^2 = 2$ e, por isso, afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha que a afirmação é verdadeira para n, ou seja, $1 + n \leq 2^n$. Daí, para o sucessor de n que

$$1 + (n + 1) = 2 + n \leq 2 + n + n = 2 + 2n = 2(1 + n) \leq 2^1 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Logo, a afirmação também é verdadeira para o sucessor de n e, pelo princípio da indução, tem-se que a afirmação é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Com o princípio da boa ordenação, o princípio da indução pode ser reescrito substituindo a primeira condição "vale para $P(1)$" por "vale para $p(a)$, para $a \in \mathbb{N}$", e substituindo "supondo que vale para n" por "supondo que vale para $n > a$", tem-se que o princípio da indução permanece válido para todo $n \geq a$.

Exemplo 2.4.5 *Prove que $2^n > 2n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5$.*

Solução: É preciso mostrar que a afirmação é verdadeira para $n = 5$. Para isto, tem-se que $32 = 2^5 > 2.5 + 1 = 11$. Logo a afirmação é verdadeira para $n = 5$.

Suponha agora que a afirmação é válida para $n (n > 5)$, ou seja, $2^n > 2n + 1$. Então, para o sucessor de n, tem-se

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (2n+1) \cdot 2 = (2n+1) + (2n+1) > 2n+1+2 = 2(n+1)+1.$$

Portanto, como a afirmação também é verdadeira para o sucessor de n, segue do princípio da indução que a afirmação é verdadeira para todo número natural maior ou igual a cinco. □

Teorema 2.4.3 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, então:*

1. *Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então, $a \leq c$;*
2. *Se $a > b$ e $b > c$, então, $a > c$;*
3. *Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então, $a \geq c$;*

4. *Se* $a \leq c$, *então,* $a + c \leq b + c$ *e* $ac \leq bc$.

5. *Se* $a > c$, *então,* $a + c > b + c$ *e* $ac > bc$.

6. *Se* $a \geq c$, *então,* $a + c \geq b + c$ *e* $ac \geq bc$.

7. *Se* $a \neq c$, *então,* $a + c \neq b + c$ *e* $ac \neq bc$.

Demonstração: Exercício. $\square$

Agora, faça alguns exercícios. Bom trabalho.