3.2 Limite e Desigualdade

Observação 3.2.1 *Dizer matematicamente que uma sequência (x_n) goza de uma propriedade P, para todo n suficientemente grande, é o mesmo que dizer que existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, x_n goza da propriedade.*

Agora vamos apresentar algumas propriedades importantes no estudo de sequências.

Teorema 3.2.1 *Seja (x_n) uma sequência convergente, com $x_n \to a$. Se $b < a$, então, para todo n suficientemente grande, temos que $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$, então, para todo n suficientemente grande temos que $x_n < b$.*

Demonstração: Provemos o caso onde $a < b$, o outro caso é análogo e, por isso, será deixado de exercício. Considere $\epsilon = b - a > 0$ e, consequentemente, temos que $b > a + \epsilon$. Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, ou seja, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon < b$. Portanto, $x_n < b$, para todo $n > n_0$. ■

Corolário 3.2.1 *Seja (x_n) uma sequência convergente, com $x_n \to a$. Se $a > 0$, então, para todo n suficientemente grande, temos que $x_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$, então, para todo n suficientemente grande temos que $x_n < 0$.*

Solução: Basta considerar $b = 0$ no Teorema 3.2.1 e o resultado sai naturalmente. ■

Corolário 3.2.2 *Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes, com $x_n \to a$ e $y_n \to b$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então, $a \leq b$. Em particular, se $x_n \leq b$ para todo n suficientemente grande, então, $\lim x_n \leq b$.*

Solução: Suponha que $b < a$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$. Assim, do Teorema 3.2.1 temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo n suficientemente grande $y_n < c < x_n$, o que é uma contradição com a hipótese. Portanto, $a \leq b$. Para o caso particular, considere $y_n = b$, para todo n que o resultado sai naturalmente. ■

É importante ressaltar que mesmo tendo $x_n < y_n$, para todo n, com $x_n \to a$ e $y_n \to b$, não há garantias de que $a < b$. Para exemplificar isso, observe que se $x_n = 0$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$, para todo n, então, $x_n < y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mas $\lim x_n = 0 = \lim y_n$.

Teorema 3.2.2 *(Teorema do Sanduíche:) Se $\lim x_n = a = \lim y_n$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para n suficientemente grande, então, $\lim z_n = a$.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim x_n = a = \lim y_n$, existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes, tais que se $n > n_1$, então, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e se $n > n_2$, então, $y_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Assim, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon$ e, consequentemente, $z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, para todo $n > n_0$. Portanto, $z_n \to a$. ■