1.3 Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Nessa seção apresentaremos a definição de *Funções Reais de Várias Variáveis Reais* e algumas das suas propriedades. Também apresentaremos a definição de *Gráfico* de funções e estudaremos algumas superfícies.

Definição 1.3.1 *Uma **Função** Real f de n Variáveis Reais é uma relação que transforma num **único** número real ω, cada n-upla ordenada $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de números reais de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, chamado de **Domínio** da função f. Notação:*

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & \omega = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}.$$

O conjunto

$$f(D) = Im_f = \{\omega \in \mathbb{R}; (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\},$$

*é o conjunto **Imagem** da função f.*

■

Exemplo 1.3.1 *Seja f a função real de duas variáveis dada por:*

$$z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$$

Então, o conjunto domínio D_f é dado por:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Ou seja, D_f é o círculo delimitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 25$. Um esboço de D_f é apresentado na Figura 1.6.

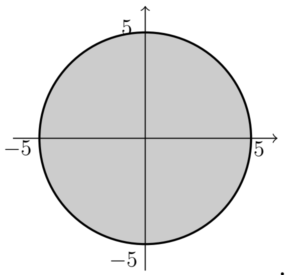


Figura 1.6: Ilustração do conjunto domínio D_f da função f do Exemplo 1.3.1.

Como $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, então, $0 \leq z \leq 5$ e, por isso, $Im_f = [0,5]$.

■

Exemplo 1.3.2 *Seja g a função real de duas variáveis, dada por:*

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}.$$

Assim, o conjunto domínio D_g da função g é formado por todos os pontos

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 25\}.$$

Ou seja, D_g consiste de todos os pontos do plano XY externos ao círculo delimitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 25$ (contro na origem e raio 5), como visto na Figura 1.7.

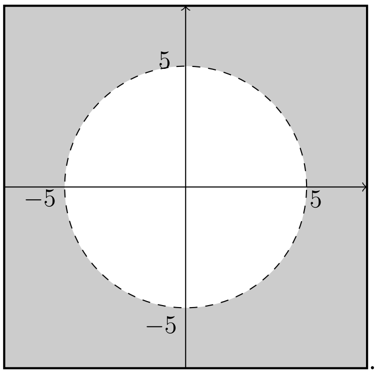


Figura 1.7: Ilustração do conjunto domínio D_g da função g do Exemplo 1.3.2.

Como $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$, *então,* $z > 0$ *e, por isso,* $Im_g = \mathbb{R}_+$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.3.3 *Seja f a função definida por:*

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}.$$

Então, o conjunto domínio D_f é dado por:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}.$$

Um esboço de D_f é apresentado na Figura 1.8.

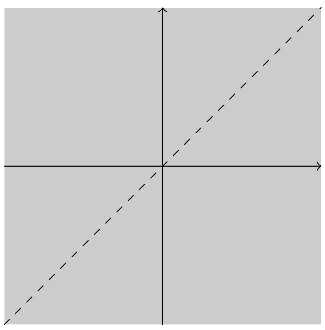


Figura 1.8: Ilustração do conjunto domínio D_f da função f do Exemplo 1.3.3.

Como $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, *então,* $Im_f = \mathbb{R}$, *visto que z pode assumir qualquer valor.*

$\blacksquare$

Exemplo 1.3.4 *Representе graficamente o conjunto domínio da função f dada pela expressão* $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}$.

Solução: Temos que a função f está definida para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y - x \geq 0$ e $1 - y \geq 0$. Assim, segue que

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x \text{ e } y \leq 1\}.$$

Um esboço de D_f é apresentado na Figura 1.9.

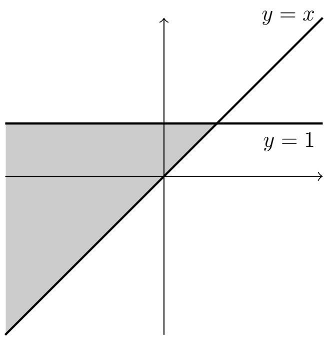


Figura 1.9: Ilustração do conjunto domínio D_f da função f do Exemplo 1.3.4.

Como $z = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}$, então, $z \geq 0$ e, por isso, $Im_f = \mathbb{R}_+$. ■

Exemplo 1.3.5 *Represente graficamente o domínio da função* $\omega = f(u,v)$, *sabendo que* $u^2 + v^2 + \omega^2 = 1, \omega \geq 0$.

Solução: Como $\omega \geq 0$, temos que

$$u^2 + v^2 + \omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega^2 = 1 - u^2 - v^2 \Leftrightarrow \omega = f(u,v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}.$$

Dessa forma, temos que D_f é o conjunto formado por todos os pontos $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tais que $1 - u^2 - v^2 \geq$, ou seja, D_f é formado pelos pontos do círculo delimitado pela circunferência centrada na origem e de raio igual a 1. Um esboço de D_f é apresentado na Figura 1.10.

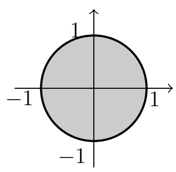


Figura 1.10: Ilustração do conjunto domínio D_f da função f do Exemplo 1.3.5.

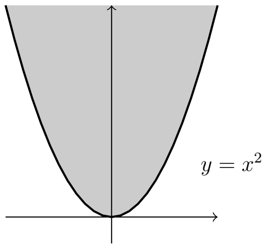
Como $\omega = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$, então, $0 \leq \omega \leq 1$ e, por isso, $Im_f = [0,1]$. ■

Exemplo 1.3.6 *Represente graficamente o domínio da função* $z = f(x,y)$, *sabendo que* $z = \sqrt{y - x^2}$.

Solução: Temos que o domínio da função f é formado por todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y - x^2 \geq 0$ e, por isso, temos que

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}.$$

Um esboço de D_f é apresentado na Figura 1.11.



.

Figura 1.11: Ilustração do conjunto domínio D_f da função f do Exemplo 1.3.6.

Como $z = \sqrt{y - x^2}$, então, $z \geq 0$ e, por isso, $Im_f = \mathbb{R}_+$. ■

Observação 1.3.1 *a) Seja*

$$\begin{array}{rccl} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & \omega = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}.$$

Então, ω é chamado de Variável Dependente enquanto que $x_1, \cdots, x_n$ são as Variáveis Independentes.

b) Nesse estudo o contradomínio será sempre o conjunto $\mathbb{R}$, desde que não seja feita menção ao contrário.

■

Definição 1.3.2 *Uma função Polinomial $p(x_1, \cdots, x_n)$, de grau P e de n variáveis reais, é uma função p tal que $p(x_1, \cdots, x_n)$ é a soma de Monômios da forma*

$$c_r \cdot x_1^{r_1} \cdot (\cdots) \cdot x_n^{r_n},$$

com $r_1 + \cdots + r_n \leq P$.

■

Observação 1.3.2 *a) De uma forma geral, uma função polinomial fica dada pela expressão*

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{r_1 + \cdots + r_n \leq P} c_r \cdot x_1^{r_1} \cdot (\cdots) \cdot x_n^{r_n},$$

onde c_r são constantes e $r_1, \cdots, r_n$ são inteiros não-negativos.

b) O grau de cada monômio é dado pela soma dos seus expoentes $r_1, \cdots, r_n$ e, consequentemente, o grau P de uma função polinomial é o grau de maior valor dos monômios que compõe o mesmo.

■

Exemplo 1.3.7 *a) Seja f a função dada por*

$$f(x, y) = 6x^3y^2 - 5xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y.$$

Então, f é uma função polinomial de duas variáveis (x e y) cujo grau é 5.

b) Seja f a função dada por

$$f(x,y,z) = 3x^3y^3 - 5xy^3z^4 + 2x^2yz - 5x^2 + y - z^9 + \sqrt{5}.$$

Então, f é uma função polinomial de três variáveis cujo grau é 9.

c) A função polinomial de n variáveis

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

com $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, é chamada de Função Afim.

d) A função afim de n variáveis com $a_0 = 0$, ou seja, a função polinomial

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

(com $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$) é chamada de Função Linear.

■

Definição 1.3.3 *Uma **Função Racional** de n variáveis reais é uma função f tal que*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{p(x_1, \cdots, x_n)}{q(x_1, \cdots, x_n)},$$

onde p e q são funções polinomiais de n variáveis reais. O conjunto domínio da função racional é formado por todos os pontos $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tais que $q(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

■

Exemplo 1.3.8 *a) A função $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ é uma função racional, cujo conjunto domínio é $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$.*

b) A função $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 3xy + 1}{x^2y^2 + 1}$ é uma função racional cujo, conjunto domínio é $D_f = \mathbb{R}^2$.

c) A função $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ não é uma função racional, visto que no denominador não temos um polinômio. Contudo, p domínio da função da função f é dado por $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

d) A função $f(x,y) = 2x - 4y + 3$ é uma função racional, cujo denominador é o polinômio constante $q(x,y) = 1$. Assim, todo polinômio é uma função racional cujo conjunto domínio é $D_f = \mathbb{R}^n$, onde n é o número de variáveis do polinômio.

■

Definição 1.3.4 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Então, dizemos que f é uma **Função Homogênea** de grau λ se*

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^\lambda f(x_1, \cdots, x_n),$$

para todo $t > 0$ e para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in D$ tal que $(tx_1, \cdots, tx_n) \in D$.

■

Exemplo 1.3.9 *a) A função $f(x,y) = 3x^2 + 5xy + y^2$ é uma função homogênea de grau 2.*

De fato: *Temos que*

$$f(tx,ty) = 3(tx)^2 + 5(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(3x^2 + 5xy + y^2) = t^2 f(x,y).$$

Portanto, como $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$, segue que $f(x,y) = 3x^2 + 5xy + y^2$ é uma função homogênea de grau 2. □

b) A função $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ é uma função homogênea de grau zero.

De fato: *Temos que*

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,y).$$

Portanto, como $f(tx,ty) = f(x,y) = t^0 f(x,y)$, segue que $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ é uma função homogênea de grau zero. □

c) A função $f(x,y) = \dfrac{xe^{x/y}}{x^2+y^2}$ é uma função homogênea de grau -1.

De fato: *Temos que*

$$f(tx,ty) = \frac{txe^{tx/ty}}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{t\left(xe^{x/y}\right)}{t^2(x^2+y^2)} = \frac{1}{t}\frac{xe^{x/y}}{x^2+y^2} = t^{-1} f(x,y).$$

Portanto, como $f(tx,ty) = t^{-1} f(x,y)$, segue que $f(x,y) = \dfrac{xe^{x/y}}{x^2+y^2}$ é uma função homogênea de grau -1. □

d) A função $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$ é uma função homogênea de grau $\dfrac{-3}{2}$.

De fato: *Temos que*

$$f(tx,ty) = \frac{\sqrt{tx+ty}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{t}\sqrt{x+y}}{t^2(x^2+y^2)} = \frac{t^{1/2}}{t^2}\frac{x+y}{x^2+y^2} = t^{-3/2} f(x,y).$$

Portanto, como $f(tx,ty) = t^{-3/2} f(x,y)$, segue que $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$ é uma função homogênea de grau $\dfrac{-3}{2}$. □

e) A função $f(x,y) = 2x + 5y + 3$ não é uma função homogênea, visto que

$$2tx + 5ty + 3 = f(tx,ty) \neq f(x,y) = 2x + 5y + 3,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

■

Definição 1.3.5 *Sejam $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções. Então, a **Função Composta** $g \circ f$ é a função real de n variáveis reais dada por*

$$(g \circ f)(x_1, \cdots, x_n) = g(f(x_1, \cdots, x_n)).$$

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos $(x_1, \cdots, x_n) \in B = D_f$ para os quais $f(x_1, \cdots, x_n) \in D = D_g$.

■

Exemplo 1.3.10 *Dada a função $f(t) = ln(t)$ e $g(x, y) = x^2 + y$, determine $h(x, y)$ sendo $h = f \circ g$, e escreva o domínio de h.*

Solução: Temos que

$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(x^2 + y) = ln(x^2 + y).$$

Então, como o domínio de g é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ e o domínio de f é $(0, +\infty)$, segue que o domínio da função h é o conjunto

$$D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y > 0\}.$$

■

Definição 1.3.6 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Então, o **Gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos $(x_1, \cdots, x_n, \omega)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ para os quais $(x_1, \cdots, x_n) \in D_f$ e $\omega = f(x_1, \cdots, x_n)$.*

Notação:

$$Gr(f) = \{(x_1, \cdots, x_n, \omega) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, \cdots, x_n) \in D_f \text{ e } \omega = f(x_1, \cdots, x_n)\}.$$

■

Exemplo 1.3.11 *O gráfico da função constante $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = k$ é um plano paralelo ao plano XY, cortando o eixo z no ponto k, como ilustrado na Figura 1.12.*

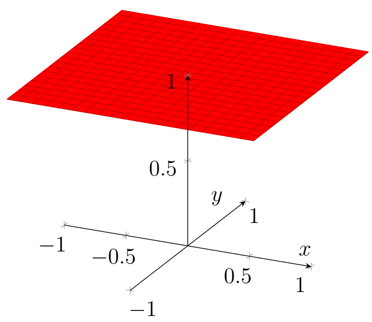


Figura 1.12: Esboço do gráfico da superfície da função f do Exemplo 1.3.12.

■

Observação 1.3.3 *a) Estabelecendo-se um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, então, temos que o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como sendo o lugar geométrico do $\mathbb{R}^{n+1}$ dados pelos pontos*

$$(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)).$$

*b) Só é possível fazer o esboço do gráfico de uma função real que tenha **NO MÁXIMO** duas variáveis independentes.*

c) O gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é chamado de Superfície. Assim, uma superfície representa o conjunto de todos os pontos do $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas cartesianas são dadas pelas triplas ordenadas de números reais (x, y, z), sendo $z = f(x, y)$.

d) Para funções reais f de duas variáveis reais x e y, o domínio de f é um subconjunto de pontos no plano XY, e como cada par ordenado no domínio de f corresponde a um único valor de z, então, nenhuma reta perpendicular ao plano XY intercepta o gráfico de f em mais de um ponto.

■

Exemplo 1.3.12 *No exemplo 1.3.1, a superfície corresponde ao hemisfério superior de uma esfera centrada na origem e de raio 5. Essa superfície está representada na Figura 1.13.*

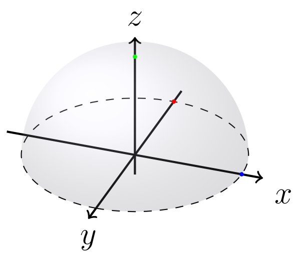


Figura 1.13: Esboço do gráfico da função f do Exemplo 1.3.12.

■

Exemplo 1.3.13 *Faça um esboço do gráfico da função f cujos valores funcionais são dados por $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

Solução: Observe que:

i. No plano XY (ou seja, quando $z = 0$) temos a origem, pois $x^2 + y^2 = 0$.

ii. No plano XZ (ou seja, quando $y = 0$) temos a parábola $z = x^2$.

iii. Analogamente, no plano YZ (ou seja, quando $x = 0$) temos a parábola $z = y^2$.

iv. Para qualquer plano paralelo ao plano XY, passando por k, obtemos uma circunferência com centro $(0, 0, k)$ e raio $\sqrt{k}$.

Dessa forma, de posse dessas informações, obtermos a superfície ilustrada na Figura 1.14.

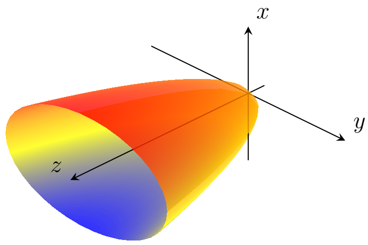


Figura 1.14: Esboço do gráfico do Parabolóide apresentado no Exemplo 1.3.13.

■

Exemplo 1.3.14 *Faça um esboço do gráfico da função f cujos valores funcionais são dados por* $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$.

Solução: Observe que:

i. No plano XY (ou seja, quando $z = 0$) temos a origem, pois $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 0$.

ii. No plano XZ (ou seja, quando $y = 0$) temos a parábola $z = \dfrac{x^2}{4}$.

iii. Analogamente, no plano YZ (ou seja, quando $x = 0$) temos a parábola $z = \dfrac{y^2}{9}$.

iv. Para qualquer plano paralelo ao plano XY, passando por k, produz uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = (\sqrt{k})^2$.

Dessa forma, de posse dessas informações, obtemos a superfície ilustrada pela Figura 1.15.

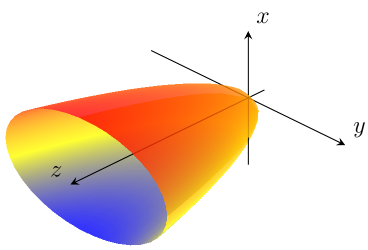


Figura 1.15: Esboço do gráfico do Paraboloide apresentado no Exemplo 1.3.14.

■

Observação 1.3.4 *O gráfico da função dada pela equação*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

é chamado de ***Paraboloide Elíptico****. Quando $a = b$ na equação do paraboloide elíptico, temos o chamado* ***Paraboloide de Rotação*** *(ou simplesmente,* ***Paraboloide****).*

■

Definição 1.3.7 *Suponha que a superfície $z = f(x,y)$ seja interceptada por um plano $z = k$ e que a curva de interceptação seja projetada no plano XY. Essa curva projetada, cuja equação é $f(x,y) = k$, é chamada de* ***Curva de Nível*** *da função f em k. A ilustração da curva de nível no plano XY é chamado de* ***Mapa de Contorno****.*

■

Exemplo 1.3.15 *Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$, como no Exemplo 1.3.12, então:*

a) Seja $k = 0$. Então, temos que $f(x,y) = 0$ e, por isso, a curva de nível é o conjunto de todos os pontos tais que $x^2 + y^2 = 0$. Logo, a curva de nível para $k = 0$ é apenas a origem.

b) Seja $k = 1$. Então, temos que $f(x,y) = 1$ e, por isso, a curva de nível é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 1$. Logo, a curva de nível para $k = 1$ é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, que é uma circunferência centrada na origem e raio 1.

c) Seja $k = 4$. Então, temos que $f(x,y) = 4$ e, por isso, a curva de nível é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 4$. Logo, a curva de nível para $k = 4$ é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$, que é uma circunferência centrada na origem e raio 2.

d) Seja $k = 9$. Então, temos que $f(x,y) = 9$ e, por isso, a curva de nível é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 = 9$. Logo, a curva de nível para $k = 9$ é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 9\}$, que é uma circunferência centrada na origem e raio 3.

O mapa de contorno com as curvas de nível aqui descritas é apresentado na Figura 1.16.

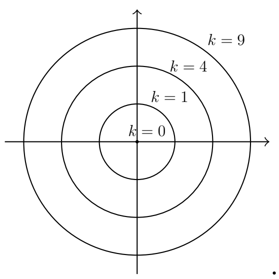


Figura 1.16: Mapa de contorno com algumas curvas de nível da função f do Exemplo 1.3.15.

■

Observação 1.3.5 *a) O conjunto imagem consiste de todos os possíveis valores de k e, por isso, desenhas todas as curvas de nível de uma função equivale a desenhar o conjunto imagem.*

b) Cada curva de nível $f(x, y) = z$, no mapa de contorno, consiste no conjunto de todos os pontos $(x, y) \in D_f$ que possuem o mesmo valor funcional k.

■

Exemplo 1.3.16 *Seja f a função dada por $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Assim,*

a) Determine D_f e $f(D_f)$;

b) Faça um mapa de contorno para a função f;

c) Faça um esboço do gráfico da função f.

Solução:

a) Temos que f está definida para todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 \neq 0$, ou seja, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Além disso, temos que $f \to 0$ quando $x \to +\infty$ ou $y \to \infty$ e $f \to +\infty$ quando $x \to 0$ e $y \to 0$. Portanto,

$$f(D_f) =]0, +\infty[.$$

b) Cada curva de nível é obtida fixando z. Assim, para cada $z = k^2$ constante, temos a equação

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = k^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2},$$

que é a expressão de uma circunferência de raio $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Um mapa de contorno para a função f é apresentado na Figura 1.17.

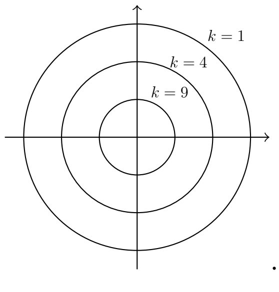


Figura 1.17: Um mapa de contorno para a função f do Exemplo 1.3.16.

c) • Para $x = 0$, temos a curva $z = \dfrac{1}{y^2}$;

• Para $y = 0$, temos a curva $z = \dfrac{1}{x^2}$;

- Para cada constante $k = c^2$, temos a curva $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{c^2}$, ou seja, uma circunferência centrada no ponto $(0, 0, k)$ e raio c.

Assim, um esboço do gráfico da função f é apresentado na Figura 1.18.

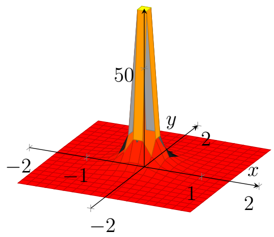


Figura 1.18: Esboço do gráfico da função f do Exemplo 1.3.16.

■

Exemplo 1.3.17 *Desenhe um mapa de contorno para a função f dada por*

$$f(x,y) = \frac{y}{x-1}.$$

Solução: Temos que $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 1\}$ e $Im_f = \mathbb{R}$. Para cada $z = k$ constante, temos que

$$\frac{y}{x-1} = k \Rightarrow y = kx - k, \text{ com } x \neq 1.$$

Assim, temos que as curvas de nível de f são retas da forma $kx - k$, com $x \neq 1$. Um esboço dessas curvas de nível são apresentadas na Figura 1.19.

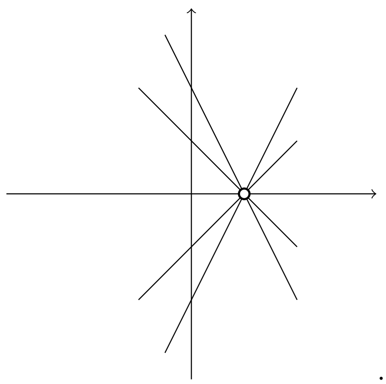


Figura 1.19: Ilustração de curvas de nível da função f do Exemplo 1.3.17.

■

Observação 1.3.6 *Do mesmo modo que se estuda curvas de nível para funções de duas variáveis, podemos considerar as superfícies para funções de três variáveis. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função. Se $k \in Im_f$, então, temos que o gráfico $f(x,y,z) = k$ é uma superfície, denominada Superfície de Nível de f em k. Consequentemente, podemos concluir que toda superfície no espaço tridimensional pode ser considerada como uma superfície de nível de alguma função de três variáveis.*

■

Exemplo 1.3.18 *Seja a função g definida pela equação $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, então, a superfície da Figura 1.14 é a superfície de nível da função $g = 0$. Do mesmo modo, a superfície com equação $5 + z - x^2 - y^2 = 0$ é a superfície de nível da função $g = 5$.*

■

Agora, faça alguns exercícios para fixar os conceitos aprendido.

1.4 Exercícios

Exercício 1.4.1 *Em cada item abaixo, determine os conjuntos domínio e imagem da função f e faça um esboço da região no $\mathbb{R}^2$ que representa o domínio de f.*

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$;

b) $f(x, y) = \dfrac{4}{4 - x^2 - y^2}$;

c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

d) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$;

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$;

f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 16}$;

g) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

h) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$;

i) $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$;

j) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$;

k) $f(x, y) = \arccos(x - y)$;

l) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$;

m) $f(x, y) = \ln(xy - 1)$;

n) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

Exercício 1.4.2 *Em cada item abaixo, determine os conjuntos domínio e imagem da função f, determine o gráfico da função e faça um esboço desse gráfico.*

a) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;

b) $f(x, y) = 6 - 2x + 2y$;

c) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$;

d) $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$;

e) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

f) $f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$;

g) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$;

h) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$;

i) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$;

j) $f(u, v) = u + v + 1$;

k) $\omega = (x - y)^2,\ x \geq 0$ e $y \geq 0$;

l) $f(x, y) = x,\ x \geq 0$.

Exercício 1.4.3 *Usando as equações do exercício anterior, faça um esboço do mapa de contorno da função f, mostrando as curvas de nível de f nos números dados.*

a) A função do Item 1 nos pontos 0, 1, 2, 3 e 4;

b) A função do Item 2 nos pontos 10, 6, 2, 0, -2, -6 e -10;

c) A função do Item 3 nos pontos 16, 12, 7, 0, -9 e -20;

d) A função do Item 4 nos pontos 0, 2, 4, 6, 8 e 10;

e) A função do Item 5 nos pontos 16, 9, 4, 0, -4, -9 e -16;

f) A função do Item 8 nos pontos 10, 8, 6, 5 e 0;

Exercício 1.4.4 *Ache a função $h = f \circ g$ e ache o domínio de h.*

a) $f(t) = arcsen(t)$ *e* $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

b) $f(t) = e^t$ *e* $g(x, y) = yln(x)$;

Exercício 1.4.5 *Duas curvas de nível podem se intersectar? Justifique a sua resposta.*

Exercício 1.4.6 *Verifique se quais das funções a seguir são homogêneas e diga qual o grau de homogeneidade de cada uma.*

a) $f(x, y) = x - 2y$;

b) $f(x, y) = xy$;

c) $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - x^3$;

d) $f(x, y) = 4x^2 - y^2$;

e) $f(x, y) = x\cos(x - 2y)$;

f) $f(x, y) = x^3 - 2y^2 + 4$;

g) $f(x, y) = \dfrac{x + y^2}{x^2 + y}$;

h) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

i) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 2x^2y^2}{\sqrt{x - 2y}}$;

j) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercício 1.4.7 *Represente geometricamente o conjunto domínio de cada uma das funções a seguir.*

a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$;

b) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x - y - z}$, *com* $x, y, z \geq 0$;

c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

d) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - z}$.