1.3 Conjuntos Infinitos

Conhecendo os conjuntos finitos, podemos caracterizar os conjuntos que não são finitos, chamados de *Conjuntos Infinitos*.

Definição 1.3.1 *Dizemos que um conjunto X é Infinito quando ele não é um conjunto finito.*

Veja alguns exemplos.

Exemplo 1.3.1 *a) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é infinito, visto que $\mathbb{N}$ não é limitado (Corolário 1.2.5).*

De fato: *Suponha que $\mathbb{N}$ seja limitado. Então, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $p + 1 \in \mathbb{N}$, segue que $p + 1 \leq p$, o que é uma contradição, visto que nenhum número é maior do que o seu sucessor.* □

b) Considere o conjunto $k\mathbb{N}$ formado por todos os múltiplos de um número natural k, ou seja,

$$k\mathbb{N} = \{k \cdot n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Então, temos que $k\mathbb{N}$ não é finito, visto que $k\mathbb{N}$ não é limitado.

■

Vamos começara a estabelecer alguns resultados para conjuntos infinitos.

Teorema 1.3.1 *Se X é um conjunto infinito, então, existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Demonstração: Vamos construir uma função $f : \mathbb{N} \to X$ que seja injetiva. Para isso, considere a seguinte notação: para cada subconjunto não vazio $A_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$, seja $x_i \in A_i$. Daí, tome a função f dada por $f(i) = x_i$.

Assim, se $X_1 = X$, tome x_1 como sendo qualquer elemento de X_1 e faça $f(1) = x_1$. Agora, tome $X_2 = X_1 \setminus \{f(1)\} = X \setminus \{x_1\}$, considere x_2 um elemento qualquer de X_2 e faça $f(2) = x_2$. Continuando, tome $X_3 = X_2 \setminus \{f(2)\} = X \setminus \{x_1, x_2\}$, considere x_3 um elemento qualquer de X_3 e faça $f(3) = x_3$ e assim por diante. Ou seja, de uma maneira geral, tome

$$x_n \in X_n = X_{n-1} \setminus \{f(n-1)\} = X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\},$$

que sempre será um conjunto não vazio, visto que X é infinito, e defina $f(n) = x_n$ como sendo um elemento qualquer de X_n. Dessa forma, f fica bem definida, visto que todo elemento do domínio $\mathbb{N}$ está relacionado com um único elemento do contradomínio X. Só precisamos mostrar agora que f é uma aplicação injetiva. Para isso, tome $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ (suponha $m < n$), então, como

$$f(m) = x_m \in \{x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, x_m, \cdots, x_{n-1}\},$$

e
$$f(n) = x_n \in X_{n-1} \setminus \{f(n-1)\} = X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\},$$
segue que $f(n) = x_n \neq x_m = f(m)$. Portanto, f é injetiva, completando a demonstração do teorema. ■

Observação 1.3.1 *Da Definição 1.3.1 e do Teorema 1.3.1 podemos concluir, de uma maneira simples, que um determinado conjunto X é infinito se ele não for vazio, ou se não houver uma bijeção $f : I_n \to X$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Alguns dos resultados envolvendo conjuntos infinitos são conclusões exclusivas das propriedades estabelecidas para os conjuntos finitos. A primeira que apresentaremos está relacionada com um subconjunto e uma parte própria sua.

Corolário 1.3.1 *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\phi : X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que X seja infinito e tome $f : \mathbb{N} \to X$ uma aplicação injetiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $f(n) = x_n \in X$. Seja Y o subconjunto próprio $Y = X \setminus \{x_1\}$. Defina a aplicação $\phi : X \to Y$ dada por:
$$\begin{cases} \phi(x) = x, & se \quad x \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \phi(x_n) = x_{n+1} \end{cases}$$
Assim, temos que ϕ é uma bijeção (Prove) entre X e uma parte própria sua.

($\Leftarrow$) Suponha que tal bijeção exista e que X não seja infinito. Então, do Corolário 1.2.3, temos que não existe uma bijeção entre um conjunto e uma parte própria sua, contrariando as hipóteses. Portanto, X é um conjunto infinito. ■

Exemplo 1.3.2 *a) Seja $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Então,*
$$\phi : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}_1 \\ n & \mapsto & n+1 \end{cases}$$
é uma bijeção.

De fato: $\vdash$ *ϕ é injetiva: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Assim,*
$$m \neq n \Rightarrow m+1 \neq n+1 \Rightarrow \phi(m) \neq \phi(n),$$
ou seja, ϕ é injetiva.

$\vdash$ *ϕ é sobrejetiva: Todo número natural diferente de 1 é sucessor de algum número natural. Assim, temos que se $m \in \mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m = n+1$. Logo, ϕ é sobrejetiva.*

Portanto, $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ dada por $\phi(n) = n+1$ é uma bijeção. □

b) Seja $\mathbb{N}_p = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \cdots, p\}$. *Então,*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}_p \\ n & \mapsto & n + p \end{cases}$$

é uma bijeção (use a ideia anterior e prove).

c) Seja $P = \{2, 4, 6, \cdots\}$ *o conjunto dos números pares. Então,*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & P \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$$

é uma bijeção (prove).

d) Seja $I = \{1, 3, 5, \cdots\}$ *o conjunto dos números ímpares. Então,*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & I \\ n & \mapsto & 2n - 1 \end{cases}$$

é uma bijeção.

e) Os Conjuntos $\mathbb{N} \setminus P$ *e* $\mathbb{N} \setminus I$ *são infinitos e ilimitados.*

f) Os conjuntos $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$*, de uma forma mais geral* $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_p$*, são limitados e finitos.*

■

Corolário 1.3.2 *Dada uma função* $f : X \rightarrow Y$*, então, temos que:*

a) Se X *é infinito e* f *é injetiva, então,* Y *é infinito.*

b) Se Y *é infinito e* f *é sobrejetiva, então,* X *é infinito.*

Demonstração:

a) Seja f uma função injetiva e que X seja um conjunto infinito. Suponha, por absurdo, que Y seja finito. Assim, do Corolário 1.2.4 temos que X é finito, o que é uma contradição. Portanto, Y é infinito.

b) Seja f uma função sobrejetiva e que Y seja um conjunto infinito. Suponha, por absurdo, que X seja finito. Assim, do Corolário 1.2.4 temos que Y é finito, o que é uma contradição. Portanto, X é infinito.

■

Os outros resultados envolvendo conjuntos finitos podem ser estendidos de forma análoga. Agora, faça alguns exercícios.