1.11 A Diferenciabilidade de Funções reais de várias variáveis

Agora iremos apresentar a definição de *Diferenciabilidade* de funções reais de várias variáveis reais. Diferente do caso das funções reais de uma variável real, esse conceito não é equivalente a definição derivadas parciais, como será visto nessa seção. Para fixarmos as ideias, apresentamos inicialmente a definição de diferenciabilidade para funções reais de duas variáveis. Comecemos com a definição de *Incremento*, apresentada a seguir.

Definição 1.11.1 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função, então, o* ***Incremento*** *de f no ponto $(a, b) \in D$, denotado por $\Delta f(a, b)$, é o valor dado por*

$$\Delta f(a, b) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

$\blacksquare$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.11.1 *Encontre o incremento da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3x - xy^2$, num ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qualquer.*

Solução: Temos que

$$\Delta f(a, b) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) =$$

$$= 3(a + \Delta x) - (a + \Delta x)(b + \Delta y)^2 - (3a - ab^2) =$$

$$= 3\Delta x - b^2\Delta x - 2ab\Delta y - 2b\Delta x\Delta y - a(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2.$$

$\blacksquare$

Agora vamos apresentar a definição de *Diferenciabilidade*.

Definição 1.11.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $z = f(x, y)$. Se o incremento de f em $(a, b) \in D$ puder ser escrito da forma*

$$\Delta f(a, b) = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy, tais que $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$, quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, então, dizemos que f é ***Diferenciável*** *em (a, b).*

$\blacksquare$

Exemplo 1.11.2 *Use a Definição 1.11.2 para provar que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 3x - xy^2$ é diferenciável em todos os pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: É preciso mostrar que para todos os pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe um ϵ_1 e ϵ_2 tais que

$$\Delta f(a, b) - f_x(a, b)\Delta x - f_y(a, b)\Delta y = \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

com $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$, quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Como $f(x,y) = 3x - xy^2$, então, $f_x(a,b) = 3 - b^2$ e $f_y(a,b) = -2ab$. Assim, usando o valor de $\Delta f(a,b)$, calculado no Exemplo 1.11.1, temos que

$$\Delta f(a,b) - f_x(a,b)\Delta x - f_y(a,b)\Delta y = -a(\Delta y)^2 - 2b\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2.$$

Observe que o segundo membro da igualdade pode ser escrito da seguinte forma

$$(-2b\Delta y - (\Delta y)^2)\Delta x + (-a\Delta y)\Delta y.$$

Então, tomando $\epsilon_1 = -2b\Delta y - (\Delta y)^2$ e $\epsilon_2 = -a\Delta y$, temos que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1 = 0 \text{ e } \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2 = 0.$$

Portanto, a função f é diferenciável em todos os pontos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 1.11.3 *Prove que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x+y)^3$ é diferenciável em todos os pontos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$f(x,y) = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Assim, temos que $f_x(a,b) = 3a^2 + 6ab + 3b^2$ e $f_y(a,b) = 3a^2 + 6ab + 3b^2$. Daí, como

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = (a+\Delta x)^3 + 3(a+\Delta x)^2(b+\Delta y) + (a+\Delta x)(b+\Delta y)^2 + (b+\Delta y)^3 =$$

$$= \left[a^3 + 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right] + 3(a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2)(b+\Delta y) +$$
$$+3(a+\Delta x)(b^2 + 2b\Delta y + (\Delta y)^2) + \left[b^3 + 3b^2\Delta y + 3b(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a+\Delta x, b+\Delta y) = \left[a^3 + 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right] +$$
$$+3\left[a^2b + a^2\Delta y + 2ab\Delta x + 2a\Delta x\Delta y + b(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\Delta y\right] +$$
$$+3\left[ab^2 + 2ab\Delta y + a(\Delta y)^2 + b^2\Delta x + 2b\Delta x\Delta y + \Delta x(\Delta y)^2\right] +$$
$$+\left[b^3 + 3b^2\Delta y + 3b(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a+\Delta x, b+\Delta y) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (3a^2 + 6ab + 3b^2)\Delta x +$$
$$+(3a^2+6ab+3b^2)\Delta y + (3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6a\Delta x\Delta y + 3b(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^2\Delta y +$$
$$+3a(\Delta y)^2 + 6b\Delta x\Delta y + 3\Delta x(\Delta y)^2 + 3b(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3),$$

segue que

$$\Delta f(a,b) - f_x(a,b)\Delta x - f_y(a,b)\Delta y = 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6a\Delta x\Delta y +$$

$$+3b(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^2\Delta y + 3a(\Delta y)^2 + 6b\Delta x\Delta y + 3\Delta x(\Delta y)^2 + 3b(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3).$$

Dessa forma, tomando

$$\epsilon_1 = 3a\Delta x + (\Delta x)^2 + 6a\Delta y + 3b\Delta x + 3\Delta x\Delta y + 6b\Delta y + 3(\Delta y)^2$$

e

$$\epsilon_2 = 3a\Delta y + 3b\Delta y + (\Delta y)^2,$$

segue que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1 = 0 \text{ e } \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2 = 0.$$

Como

$$\Delta f(a,b) - f_x(a,b)\Delta x - f_y(a,b)\Delta y = \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

com $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$, quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, segue que f é diferenciável em todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. ■

No Exemplo 1.9.15 vimos que para uma determinada função real de várias variáveis podem existir suas derivadas parciais num ponto, mesmo tendo que a função não é contínua nesse ponto. Ou seja, a existência de derivadas parciais não garante a continuidade de uma função. Porém, se uma função for diferenciável no ponto, então, ela é contínua no ponto, como visto no resultado a seguir.

Teorema 1.11.1 *Se uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $(a,b) \in D$, então, f é contínua no ponto (a,b).*

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Exemplo 1.11.4 *A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem? Por que?

Solução: Vimos no Exemplo 1.9.15 que essa função f não é contínua na origem. Logo, da contra positiva do Teorema 1.11.1, segue que f não é diferenciável na origem. ■

O próximo resultado fornece condições que garante a diferenciabilidade de uma função num ponto. Essa condição é muito mais fácil de ser aplicada do que a Definição 1.11.2.

Teorema 1.11.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que f_x e f_y existam numa bola $B(A;r)$, onde $A = (a,b) \in D$. Se f_x e f_y são contínuas em A, então, temos que f é diferenciável em A.*

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Dos resultados anteriores temos que:

- Se f é descontínua num ponto (a,b), então, f não é diferenciável em (a,b), e

- Se f é contínua em (a,b) e se f possui derivadas parciais f_x e f_y contínuas em (a,b), então, f é diferenciável em (a,b).

Vamos agora aplicar essas ideias nos próximos exemplos. Antes, vamos a outra definição.

Definição 1.11.3 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é **Diferenciável numa bola** $B(A; r) \subset D$ se f for diferenciável em todos os pontos $(x, y) \in B(A; r)$.*

■

Exemplo 1.11.5 *Prove que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2xy^2$ é diferenciável em todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Observe que f é uma função polinomial e, consequentemente, contínua para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, $f_x = 2y^2$ e $f_y = 2xy$ são funções polinomiais e, por isso, são contínuas em todo ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, como f, f_x e f_y são contínuas para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, segue do Teorema 1.11.2 que f é diferenciável para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 1.11.6 *Prove que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + 3xy - 5y^3$ é diferenciável em todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Observe que f é uma função polinomial e, consequentemente, contínua para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, $f_x = 3x^2 + 3y$ e $f_y = 3x - 10y^2$ são funções polinomiais e, por isso, são contínuas em todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, como f, f_x e f_y são contínuas para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, segue do Teorema 1.11.2 que f é diferenciável para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ■

O argumento utilizando nos Exemplos 1.11.5 e 1.11.6 pode ser aplicado a qualquer função polinomial e, consequentemente, temos que uma função polinomial é diferenciável em todo ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.11.7 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$. Mostre que f é diferenciável para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Observe que f é contínua para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, visto que ela é a composição de duas funções contínuas: $g(t) = \operatorname{sen}(t)$ (que é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$) e $h(x, y) = x^2 + y^2$ (que é contínua para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Além disso, temos que

$$f_x(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x\cos(x^2 + y^2) \text{ e}$$

$$f_y(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y\cos(x^2 + y^2).$$

Consequentemente, $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existem e são contínuas para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, visto que elas são dadas pelo produto de duas funções contínuas. Portanto, como f, f_x e f_y são contínuas para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 1.11.8 *Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

use o Teorema 1.11.2 para provar que f é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução: Calculemos $f_x(x,y)$. Para $(x,y) \neq (0,0)$ temos que

$$f_x(x,y) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y^2)\left(x^2+y^2\right) + \left(x^2y^2\right)\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por outro lado, se $(x,y) = (0,0)$, segue que

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Portanto, a função $f_x(x,y)$ é dada por

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Como $y^2 \leq x^2 + y^2$, segue que

$$0 \leq \left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| = \frac{2|x|\left(y^2\right)^2}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2|x|(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 2|x| \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Assim, do Teorema do Sanduíche (Teorema 1.5.4), temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0$ e, por isso, f_x é contínua em $(0,0)$.

De maneira análoga, temos que $f_y(x,y)$ é dada por

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e utilizando uma argumentação semelhante a utilizada para f_x, temos que f_y é contínua em $(0,0)$. Portanto, como f é contínua, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e são contínuas, segue do Teorema 1.11.2 que f é diferenciável em $(0,0)$. ■

Exemplo 1.11.9 *A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

é diferenciável? Por que?

Solução: Calculemos $f_x(x,y)$. Para $(x,y) \neq (0,0)$, temos que

$$f_x(x,y) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}(x^4)\,(x^2+y^2) + (x^4)\,\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por outro lado, se $(x, y) = (0, 0)$, segue que

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Portanto, a função $f_x(x, y)$ é dada por

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,(2x^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A função $f_x(x, y)$ é contínua para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, visto que ela é a divisão de dois polinômios. Para $(x, y) = (0, 0)$, como $x^2 \leq x^2 + y^2$ e $y^2 \leq x^2 + y^2$, segue que

$$0 \leq \left| x\frac{2x^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{2|x|(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4|x|(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 6|x| \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Assim, do Teorema do Sanduíche (Teorema 1.5.4), temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y) = 0$ e, por isso, f_x é contínua em $(0, 0)$. De maneira análoga, temos que $f_y(x, y)$ é dada por

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e utilizando uma argumentação semelhante a utilizada para f_x, temos que f_y é contínua em todo (x, y). Portanto, como f é contínua, $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ existem e são contínuas em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, segue do Teorema 1.11.2 que f é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ■

Definição 1.11.4 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de* ***Classe*** *C^1, ou que f é* ***Continuamente Diferenciável****, numa bola $B(A, r) \subset D$, se f_x e f_y existem e são contínuas em A.*

■

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. Da Definição 1.11.4 temos que se uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então, f é diferenciável em D.

Observação 1.11.1 *As condições apresentadas no Teorema 1.11.2 são suficientes para provar a diferenciabilidade de uma função f num ponto, mas elas não são condições necessárias. Ou seja, uma função pode ser diferenciável num ponto mesmo tendo as suas derivadas parciais descontínuas nesse ponto. Assim, ser de classe C^1 é uma condição suficiente, mas não necessária, para a diferenciabilidade da função num ponto.*

■

Exemplo 1.11.10 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Calcule f_x e f_y.

b) Mostre que f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$.

c) Mostre que f é diferenciável.

Solução:

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$ temos que

$$f_x(x,y) = 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Por outro lado, Para $(x,y) = (0,0)$ temos que

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

visto que $x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$ e $\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 1$. Dessa forma, temos que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Analogamente, temos que

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) Observe que

$$\lim_{t\to 0} f_x(t,t) = \lim_{t\to 0}\left(2t\text{sen}\left(\frac{1}{2t^2}\right) - \frac{1}{t}\cos\left(\frac{1}{2t^2}\right)\right)$$

não existe e, por isso, f_x não é contínua em $(0,0)$. De maneira análoga, concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$ não existe e, por isso, f_y não é contínua em $(0,0)$.

c) Precisamos calcular o incremento da função f. Assim,

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) =$$

$$= ((0+\Delta x)^2 + (0+\Delta y)^2)sen\left(\frac{1}{(0+\Delta x)^2+(0+\Delta y)^2}\right) - 0 =$$

$$= f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + \Delta x sen\left(\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\Delta x +$$

$$+\Delta y sen\left(\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\Delta y.$$

Assim, tomando $\epsilon_1 = \Delta x sen\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$ e $\epsilon_2 = \Delta y sen\left(\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$, segue que

$$\Delta f(0,0) = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta x + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são funções de Δx e Δy, tais que $\epsilon_1 \to 0$ e $\epsilon_2 \to 0$, quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, então, f é diferenciável em $(0,0)$.

■

Definição 1.11.5 *Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então, a **Diferencial Total**, ou simplesmente a **Diferencial**, de f é a função df tendo valores funcionais dados por*

$$df(x,y,\Delta x,\Delta y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

■

Observação 1.11.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Assim, temos que df é uma função de quatro variáveis, sendo elas x, y, Δx e Δy. Se $z = f(x,y)$, então, escrevemos dz em vez de $df(x,y,\Delta x,\Delta y)$. Dessa forma, temos que a diferencial total é dada por:*

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y. \tag{1.3}$$

■

Se, em particular $f(x,y) = x$, então, $z = x$. Daí, $f_x(x,y) = 1$ e $f_y(x,y) = 0$. Assim, da Equação 1.3 temos que $dz = \Delta x$. Como $z = x$, para essa função $dx = \Delta x$. De maneira análoga, tomando $f(x,y) = y$, então, $z = y$, daí, $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 1$. Assim, da Equação 1.3, temos que $dz = \Delta y$. Como $z = y$, para esta função $dy = \Delta y$.

Por causa do argumento anterior, definimos as diferenciais das variáveis independentes por $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Dessa forma, a Equação 1.3 pode ser reescrita por

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy,$$

e, no ponto $(a,b) \in D$,

$$dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy. \tag{1.4}$$

Substituindo na definição de incremento (Definição 1.11.1), temos que

$$\Delta z = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy. \tag{1.5}$$

Comparando as Equações 1.5 e 1.4, e considerando dx e dy próximos de zero (e, consequentemente teremos que ϵ_1 e ϵ_2 também serão valores próximos de zero), seque que a diferencial dz pode ser considerado como uma aproximação para o valor do incremento Δz. Dessa forma, usando as notações $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, em vez de f_x e f_y, respectivamente, temos que

$$\Delta z \cong dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{1.6}$$

Vamos a algumas aplicações.

Exemplo 1.11.11 *Seja* $z = x^2y$.

a) *Calcule a diferencial* dz;

b) *Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para* Δz, *quando saímos do ponto* $A = (1, 2)$ *e vamos para o ponto* $B = (1.02, 2.01)$;

c) *Calcule o valor do erro cometido.*

Solução:

a) Como $f_x = 2xy$ e $f_y = x^2$, segue que

$$dz = 2xydx + x^2dy.$$

b) Tomando $dx = 0.02$ e $dy = 0.01$, temos que uma aproximação para Δz fica dada por

$$\Delta z \cong dz = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.02 + 1^2 \cdot 0.01 = 0.08 + 0.01 = 0.09.$$

c) Temos que $\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$. Assim,

$$\Delta z = (1.02)^2 \cdot (2.01) - 1^2 \cdot 2 = 2.0091204 - 2 = 0.091204.$$

Dessa forma, temos que o erro cometido foi de

$$|\Delta z - dz| = 0.091204 - 0.09 = 0.001204.$$

■

Exemplo 1.11.12 *Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem uma altura interna de* $6cm$, *uma raio interno de* $2cm$ *e uma espessura de* $0.1cm$. *Se o custo do metal a ser usado é de* $R\$10$ *por centímetro cúbico, ache por diferencial o custo aproximado do metal que será empregado na produção do recipiente.*

Solução: O volume de um cilindro circular reto, $V\ cm^3$, de raio é $r\ cm$ e a altura é $h\ cm$ é dado por $V = \pi r^2 h$. O volume exato de metal utilizado para gerar o recipiente é dado pela diferença entre os volumes de dois cilindros circulares retos:

i) o Externo V_e, de raio $r = 2.1$ e altura $h = 6.2$;

ii) e o Interno V_i, de raio $r = 2$ e altura $h = 6$.

O valor $\Delta V = V_e - V_i$, daria o volume exato de metal utilizado. Contudo, como somente um valor aproximado foi pedido, vamos aproximar essa variação calculando a diferencial total dV. Da definição de diferencial total aplicada na equação do volume temos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh.$$

Como $r = 2,\ h = 6$ e $dr = 0.1,\ dh = 0.2$, temos que

$$dV = 2.\pi.2.6.0.1 + \pi.2^2.0.2 = 3.2\pi.$$

Assim, $\Delta V \approx 3.2\pi\ cm^3$. Portanto, como foi gasto aproximadamente $3.2\pi cm^3$ de metal para produzir o recipiente e o custo do metal é de $R\$10.0$ por centímetro cúbico, segue que o custo aproximado do metal a ser usado na fabricação do recipiente é de $10.3.2.\pi = 100.53$ reais. ■

Até agora foram apresentados apenas os conceitos de diferenciabilidade para funções de duas variáveis. Agora essas definições serão estendidas para um número qualquer de variáveis.

Definição 1.11.6 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Se $P = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, então, o **Incremento** de f em P é dado por*

$$\Delta f(P) = f(a_1 + \Delta x_1, \cdots, a_n + \Delta x_n) - f(P).$$

■

Definição 1.11.7 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Se o incremento de f no ponto $P = (a_1, \cdots, a_n) \in D$ puder ser escrito da forma*

$$\Delta f(P) = f_{x_1}(P)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(P)\Delta x_n + \epsilon_1 \Delta x_1 + \cdots + \epsilon_n \Delta x_n,$$

*onde $\epsilon_1 \to 0, \cdots, \epsilon_n \to 0$ quando $(\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n) \to (0, \cdots, 0)$, então, f é **Diferenciável** em P.*

■

Observação 1.11.3 *a) O Teorema 1.11.2 pode ser estendido para fornecer condições suficientes para a diferenciabilidade de funções de n variáveis num ponto P, basta que $f_1, \cdots, f_n$ existam todas numa bola $B(P; r)$ e que elas sejam contínuas em P.*

b) A diferenciabilidade de funções reais de n variáveis garante a continuidade da função f e, do mesmo modo que para funções reais de uma variável, a existência de derivadas parciais não garante a diferenciabilidade da função no ponto dado.

■

Definição 1.11.8 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $w = f(x_1, \cdots, x_n)$. Tome $dx_1 = \Delta x_1, \cdots, dx_n = \Delta x_n$. Se f é diferenciável em P, então, a **Diferencial Total** de f é a função df tendo valores funcionais dados por*

$$df(P, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)dx_n.$$

■

Usando a notação $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ em vez de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, podemos reescrever a igualdade da definição anterior como

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}dx_n.$$

Exemplo 1.11.13 *As dimensões de uma caixa são medidas e obtemos* $10cm$, $12cm$ *e* $15cm$*, as medidas são corretas até* $0.02cm$*. Calcule aproximadamente o erro máximo cometido no cálculo do volume da caixa a partir das medidas dadas. Ache também o erro percentual aproximado.*

Solução:
Seja V o volume da caixa cujas dimensões são x cm, y cm e z cm. Então,

$$V = xyz.$$

O valor exato do erro é obtido calculando ΔV. Contudo, usando dV como uma aproximação para ΔV, obtemos o que se deseja. Assim,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx + xzdy + xydz.$$

Como $|\delta x| \leq 0.02$, $|\delta y| \leq 0.02$ e $|\delta z| \leq 0.02$, então, o erro máximo no volume será obtido tomando o erro máximo em cada uma das medidas nas três dimensões. Assim, tomando $dx = 0.02$, $dy = 0.02$, $dz = 0.02$, $x = 10$, $y = 12$ e $z = 15$, temos que

$$dV = 12.15.0.02 + 10.15.0.02 + 10.12.0.02 = 9.$$

Logo, $\Delta V \cong 9cm^3$, e consequentemente o erro possível no cálculo do volume com as medidas dadas é de aproximadamente $9cm^3$. O erro relativo será obtido encontrando dividindo o erro pelo valor real. Daí, o erro relativo no cálculo do volume a partir das medidas dadas é

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \frac{dV}{V} = \frac{9}{1800} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} \cong 0.005,$$

ou seja, o erro percentual é aproximadamente 0.5%. ■

Exemplo 1.11.14 *Um recipiente fechado na forma de um paralelepípedo tem comprimento interno de* $8m$*, uma largura interna de* $5m$*, uma altura interna de* $4m$ *e uma espessura de* $4cm$*. Use diferenciais para aproximar a quantidade de material necessária para construir o recipiente.*

Solução: A quantidade de material necessária para construir o recipiente é a diferença entre o volume externo e o volume interno. Como

$$V = xyz \text{ e } \Delta V \approx dV,$$

segue que

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx + xzdy + xydz.$$

Assim, $\Delta V \approx 8 \cdot 5 \cdot 0.08 + 8 \cdot 4 \cdot 0.08 + 4 \cdot 5 \cdot 0.08 = 3.2 + 2.56 + 1.6 = 7.36m^3$, ou seja, é necessário, aproximadamente, de $7.36m^3$ de material para construir o recipiente. ■

Agora, façamos alguns exercícios.

1.12 Exercício

Exercício 1.12.1 *Para cada uma das funções abaixo, calcule o que se está pedindo.*

a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2$:

- *i)* $\Delta f(1,4)$ *(o incremento do* f *no ponto dado);*
- *ii)* $\Delta f(1,4)$, *quando* $\Delta x = 0.03$ *e* $\Delta y = -0.02$;
- *iii)* $df(1,4,\Delta x,\Delta y)$ *(a diferencial total no ponto dado);*
- *iv) d)* $df(1,4,0.03,-0.02)$.

b) $f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$:

- *i)* $\Delta f(2,-1)$ *(o incremento do* f *no ponto dado);*
- *ii)* $\Delta f(2,-1)$, *quando* $\Delta x = -0.01$ *e* $\Delta y = 0.02$;
- *iii)* $df(2,-1,\Delta x,\Delta y)$ *(a diferencial total no ponto dado);*
- *iv)* $df(1,4,-0.01,0.02)$.

c) $f(x,y) = xye^{xy}$:

- *i)* $\Delta f(2,-4)$ *(o incremento do* f *no ponto dado);*
- *ii)* $\Delta f(2,-4)$, *quando* $\Delta x = -0.1$ *e* $\Delta y = 0.2$;
- *iii)* $df(2,-1,\Delta x,\Delta y)$ *(a diferencial total no ponto dado);*
- *iv)* $df(1,4,-0.1,0.2)$.

d) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$:

- *i)* $\Delta f(3,0)$ *(o incremento do* f *no ponto dado);*
- *ii)* $\Delta f(3,0)$, *quando* $\Delta x = 0.04$ *e* $\Delta y = 0.03$;
- *iii)* $df(3,0,\Delta x,\Delta y)$ *(a diferencial total no ponto dado);*
- *iv)* $df(3,0,0.04,0.03)$.

Exercício 1.12.2 *Encontre a diferencia de cada uma das funções a seguir.*

a) $f(x,y) = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$;

b) $f(x,y) = y\tan(x^2) - 2xy$;

c) $f(x,y) = x\cos(y) - ysen(x)$;

d) $f(x,y) = xe^{2y} + e^{-y}$;

e) $f(x,y) = x^3y^2$;

f) $f(x,y) = \cos(xy)$;

g) $f(x,y) = x\arctan(x+2y)$;

h) $f(u,v) = arcsen(uv)$;

i) $f(p,q) = \ln(1+p^2+q^2)$;

j) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$;

k) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$;

l) $f(x,y,z) = x\arctan(z) - \dfrac{y^2}{z}$;

m) $f(x,y,z) = e^{yz} - \cos(xz)$.

Exercício 1.12.3 *Prove que cada uma das funções abaixo são diferenciáveis em todos os pontos do seu domínio.*

a) $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^{-2}y^{-2}$;

b) $f(x,y) = \dfrac{3x-4y}{x^2+8y}$;

c) $f(x,y) = 3ln(xy) + 5sen(x)$;

d) $f(x,y) = yln(x) - \dfrac{x}{y}$;

e) $f(x,y) = arctg(x+y) + \dfrac{1}{x-y}$;

f) $f(x,y) = e^{2x}sen(y) + e^{-2x}cos(y)$;

Exercício 1.12.4 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y-2, & se \quad x=1 \ ou \ y=1 \\ 2, & se \quad x \neq 1 \ e \ y \neq 1 \end{cases}.$$

Prove que $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$ existem, mas f não é diferenciável em $(1,1)$.

Exercício 1.12.5 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prove que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 1.12.6 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 1.12.7 *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}, & se \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & se \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Prove que $f_x(0,0,0)$, $f_y(0,0,0)$, e $f_z(0,0,0)$ existem, mas que f não é diferenciável em $(0,0,0)$.

Exercício 1.12.8 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $D = B(A;r)$, com $A = (a,b)$. Mostre que se f é diferenciável em A, então, f possui as derivadas parciais $f_x(A)$ e $f_y(A)$.*

Exercício 1.12.9 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $z = f(x,y)$. Mostre que a diferencial total $df(x,y,\Delta x,\Delta y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$ é uma transformação linear.*

Exercício 1.12.10 *Calcule o valor aproximado da variação da área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2m$ e $y = 3m$ para $x = 2.01m$ e $y = 2.97m$.*

Exercício 1.12.11 *Um recipiente fechado na forma de um sólido retangular deve ter um comprimento interno de* $8m$*, uma largura interna de* $5m$*, uma altura interna de* $4m$ *e uma espessura de* $4cm$*. Use diferenciais para estimar a quantidade de material necessária para construir o recipiente.*

Exercício 1.12.12 *A altura de um cone é* $h = 20cm$ *e o raio da base é* $r = 12cm$*. Calcule um valor aproximado para a variação do volume quando* h *aumenta* $2mm$ *e o raio diminui* $1mm$*.*

Exercício 1.12.13 *A energia consumida num resistor elétrico é dada por* $P = \dfrac{V^2}{R}$ *watts. Sabendo que* $V = 100$ *volts e* $R = 10$ *ohms, calcule:*

a) Calcule a diferencial dP*;*

b) Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para ΔP*, quando* V *decresce* 0.2 *volts e* R *aumenta de* 0.01 *ohm.*

c) Calcule o valor do erro cometido com a aproximação.