8.3 Derivada e Crescimento Local

Usando as definições de derivadas laterais e as propriedades envolvendo desigualdades, obtemos resultados análogos para f'_+ e f'_- e, por isso, só apresentaremos aqui os resultados para f'_+. Os resultados para o caso f'_- fica deixado como exercícios (tanto o enunciado quanto a demonstração).

Teorema 8.3.1 *Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a+\delta$ implicam em $f(a) < f(x)$.*

Demonstração: Temos que $f'_+(a) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Como $x > a$ (e, por isso, $x-a > 0$), segue da definição de limite à direita que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $a < x < a+\delta$, então,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \Rightarrow f(x)-f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a).$$

■

Teorema 8.3.2 *Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) < 0$, então, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a+\delta$ implicam em $f(a) > f(x)$.*

Demonstração: Temos que $f'_+(a) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Como $x > a$ (e, por isso, $x-a > 0$), segue da definição de limite à direita que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $a < x < a+\delta$, então,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0 \Rightarrow f(x)-f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a).$$

■

O Teorema 8.3.1 nos diz que se uma função possui derivada à direita positiva numa região para valores maiores do que a, então, $f(a)$ é o menor valor da função nessa região. Por outro lado, o Teorema 8.3.2 nos diz que se uma função possui derivada à direita negativa numa região para valores maiores do que a, então, $f(a)$ é o maior valor da função nessa região.

Corolário 8.3.1 *Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona não-decrescente, então, suas derivadas laterais, onde existem, são não negativas.*

Demonstração: Suponha que $f'_+(a)$ existe e que $f'_+(a) < 0$. Segue do Teorema 8.3.2 que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $a < x < a+\delta$, então, $f(x) < f(a)$, o que é uma contradição, visto que f é não decrescente. Portanto, se $f'_+(a)$ existe, temos que $f'_+(a) \geq 0$. ■

Corolário 8.3.2 *Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função monótona não-crescente, então, suas derivadas laterais, onde existem, são não positivas.*

Demonstração: Suponha que $f'_+(a)$ existe e que $f'_+(a) > 0$. Segue do Teorema 8.3.1 que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $a < x < a+\delta$, então, $f(x) > f(a)$, o que é uma contradição, visto que f é não crescente. Portanto, se $f'_+(a)$ existe, temos que $f'_+(a) \leq 0$. ■

Corolário 8.3.3 *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $f'(a) > 0$, então, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $a-\delta < x < a < y < a+\delta$ implicam em $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Demonstração: Imediato, tomando o Teorema 8.3.1 e o seu correspondente para a derivada lateral à esquerda. ■

Corolário 8.3.4 *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $f'(a) < 0$, então, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $a-\delta < x < a < y < a+\delta$ implicam em $f(y) < f(a) < f(x)$.*

Demonstração: Imediato, tomando o Teorema 8.3.2 e o seu correspondente para a derivada lateral à esquerda. ■

O Corolário 8.3.3 nos afirma que se f é uma função derivável num ponto a, com $f'(a) > 0$, então, $f(a)$ não é o extremo da função num determinado intervalo aberto centrado em a. Agora, vamos definir *Extremos* de funções.

Definição 8.3.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in X$. Dizemos que f possui um **Máximo Local** (ou **Relativo**) em a quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica em $f(x) \leq f(a)$. Se $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica em $f(x) < f(a)$, então, dizemos que f possui um **Máximo Local** (ou **Relativo**) **Estrito** em a.*

■

Definição 8.3.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in X$. Dizemos que f possui um **Mínimo Local** (ou **Relativo**) em a quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica em $f(x) \geq f(a)$. Se $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica em $f(x) > f(a)$, então, dizemos que f possui um **Mínimo Local** (ou **Relativo**) **Estrito** em a.*

■

Definição 8.3.3 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in X$. Dizemos que f possui um **Máximo Global** (ou **Absoluto**) em a quando $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in X$. Nesse caso, a é um **Ponto de Máximo Global** (ou **Absoluto**).*

■

Definição 8.3.4 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in X$. Dizemos que f possui um **Mínimo Global** (ou **Absoluto**) em a quando $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in X$. Nesse caso, a é um **Ponto de Mínimo Global** (ou **Absoluto**).*

■

Definição 8.3.5 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $a \in X$. Dizemos que f possui um **Extremo Local** (ou **Relativo**) em a quando f possui um máximo ou um mínimo local em a. Dizemos que f possui um **Extremo Global** (ou **Absoluto**) em a quando f possui um máximo ou um mínimo global em a.*

■

Baseada nas definições de extremos, podemos reescrever os Teoremas 8.3.1 e 8.3.2. Estando satisfeitas as hipóteses de cada um desses teoremas, então, no primeiro caso temos que f possui um mínimo local e no segundo f possui um máximo local. Vamos outras consequências dos resultados anteriores.

Corolário 8.3.5 *Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e a é um ponto de máximo local em a, então, $f'_+(a) \leq 0$.*

Demonstração: Suponha que $f'_+(a) > 0$. Assim, do Teorema 8.3.1 teríamos que $f(a) < f(x)$, para todo x suficientemente próximo de a, com $a < x$ e, consequentemente, a não seria um ponto de máximo local. ■

Corolário 8.3.6 *Se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e a é um ponto de mínimo local em a, então, $f'_+(a) \geq 0$.*

Demonstração: Suponha que $f'_+(a) < 0$. Assim, do Teorema 8.3.2 teríamos que $f(a) > f(x)$, para todo x suficientemente próximo de a, com $a < x$ e, consequentemente, a não seria um ponto de mínimo local. ■

Corolário 8.3.7 *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e f possui um extremo local em a, então, $f'(a) = 0$.*

Demonstração: Suponha que a seja um ponto de máximo local. Assim, do Corolário 8.3.5 $f'_+(a) \leq 0$ e do seu correspondente para derivada lateral à esquerda que $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a)$ e $f'(a) = f'_-(a)$ segue que $f'(a) = 0$. ■

Observação 8.3.1 *Do Teorema 8.3.1 e do Corolário 8.3.3 não podemos concluir que uma função, com derivada positiva num ponto a, é crescente numa vizinhança de a. O que esses resultado garantem é que se $f'(a) > 0$, então, $f(x) < f(a)$ para $x < a$ suficientemente próximo de a, e que $f(x) > f(a)$ para $x > a$ suficientemente próximo de a. A exceção, ou seja, a garantia que a função é crescente numa vizinhança de a, ocorre quando f' é contínua.*

■

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 8.3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2}, & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Assim, temos que a função f é derivável e, além disso,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x sen\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Tomando $x \neq 0$ *suficientemente pequeno, de forma que* $sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *e* $cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, *segue que* $f'(x) < 0$. *Por outro lado, tomando* $x \neq 0$ *suficientemente pequeno, de forma que* $sen\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ *e* $cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, *segue que* $f'(x) > 0$. *Dessa forma, existem pontos* x, *suficientemente próximo de zero, tais que* $f'(x) < 0$ *e* $f'(x) > 0$. *Logo, do Corolário 8.3.1 que* f *não é monótona.*

■

Observação 8.3.2 *No Corolário 8.3.1, mesmo que* f *seja monótona crescente e derivável, não podemos garantir que a sua derivada seja positiva em todos os pontos.*

■

Exemplo 8.3.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$. *Temos que* f *é crescente e derivável, visto que* $f'(x) = 3x^2$, *mas como* $f'(0) = 0$, *segue que* f' *não é positiva.*

■

Observação 8.3.3 *Se* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *possui um extremo local em* a. *Dessa forma, não podemos concluir que* $f'(a) = 0$, *visto que a derivada pode não existir.*

■

Exemplo 8.3.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|$. *Para esse caso, temos que* $x = 0$ *é um ponto de mínimo global, mas* $f'(0)$ *não existe, visto que* $f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$.

■

Observação 8.3.4 *Se* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *possui um extremo local em* a, *mas* a *não é um ponto de acumulação bilateral, então, temos que* $f'(a)$ *pode ser não nulo.*

■

Exemplo 8.3.4 *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x$. *Para esse caso, temos que* $x = 0$ *é um ponto de mínimo global e* $x = 1$ *é um ponto de máximo global, mas* $f'(0) = 1 = f'(1)$.

■

Definição 8.3.6 *Um ponto* $c \in X \subset \mathbb{R}$ *é chamado de* ***Ponto Crítico*** *da função derivável* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando* $f'(c) = 0$.

■

Observação 8.3.5 *a) Um ponto crítico é um ponto onde a derivada se anula ou onde a derivada não existe.*

b) Se o ponto $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ *é um extremo local, então,* c *é um ponto crítico. Mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, para* $f(x) = x^3$, *temos que* $x = 0$ *é um ponto crítico, mas* $x = 0$ *não é um ponto extremo.*

■