## 1.15 A Derivada Direcional

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Dessa forma, podemos "enxergar" a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ como sendo a taxa de variação de $f$ na direção do vetor $\vec{i} = (1, 0)$, quando $y = b$ está fixo. Analogamente, podemos considerar que a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é a taxa de variação de $f$, na direção do vetor $\vec{j} = (0, 1)$, quando $x = a$ está fixo.

Dessa forma chegamos a seguinte questão: "Podemos estender a noção de taxa de variação instantânea de uma função $f$ num ponto $P \in D_f$ numa direção qualquer?". A resposta dessa pergunta vai nos levar ao conceito de *Derivada Direcional*.

Antes disso, seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, dada por $z = f(x, y)$, e seja $P = (a, b)$ um ponto do plano $XY$. Suponhamos que $\mathbf{U}$ seja o vetor unitário que faz um ângulo de $\theta$ radianos com o vetor $\vec{i}$, ou seja, um ângulo $\theta$ radianos com o semieixo positivo das abscissas. Então, da Figura 1.23, podemos concluir que

$$\mathbf{U} = \cos(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\vec{j} = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta)).$$

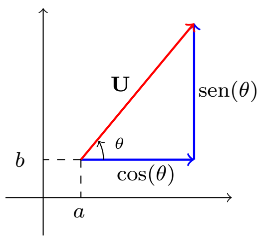


Figura 1.23: Representação do vetor unitário $\mathbf{U}$ a partir de um ponto $P = (a, b)$.

Vamos a definição de derivada direcional.

**Definição 1.15.1** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\boldsymbol{U} = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))$ é um vetor unitário, então, a* ***Derivada Direcional*** *de $f$ na direção do vetor $\boldsymbol{U}$, denotada por $D_{\boldsymbol{U}}f$, é dada por:*

$$D_{\boldsymbol{U}}f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x + h.\cos(\theta), y + h.\mathrm{sen}(\theta)\right) - f(x, y)}{h},$$

*se esse limite existir.*

■

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1.15.1** *Dada a função $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ e sendo $\boldsymbol{U}$ o vetor unitário que forma um ângulo de $\dfrac{\pi}{6}$ radianos com o semieixo positivo $x$, encontre $D_{\boldsymbol{U}}f$.*

**Solução:** Como $\mathbf{U} = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, então, pela Definição 1.15.1 temos que:

$$D_{\mathbf{U}}f = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}h, y + \dfrac{1}{2}h\right) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[3\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}h\right)^2 - \left(y + \dfrac{1}{2}h\right)^2 + 4\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}h\right)\right] - (3x^2 + y^2 + 4x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \dfrac{9}{4}h^2 - y^2 - hy - \dfrac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\sqrt{3}hx + \dfrac{9}{4}h^2 - hy - \dfrac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h} = \lim_{h\to 0} 3\sqrt{3}x + \frac{9}{4}h - y - \frac{1}{4}h + 2\sqrt{3} =$$

$$= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}.$$

■

**Exemplo 1.15.2** *Dada a função $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$, encontre a derivada direcional de $f$ na direção do vetor $\boldsymbol{U}$ que tem a mesma direção e sentido do vetor $v = (2,-1)$.*

**Solução:** Como $\mathbf{U}$ tem norma um e a mesma direção/sentido do vetor $v$, então, temos que $\mathbf{U} = \dfrac{v}{||v||}$. Assim, como $||v|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, segue que $\mathbf{U} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$. Portanto, segue da Definição 1.15.1 que:

$$D_{\mathbf{U}}f = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}h, y + \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)h\right) - f(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\left(x + \dfrac{2h}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(x + \dfrac{2h}{\sqrt{5}}\right)\left(y - \dfrac{h}{\sqrt{5}}\right) + \left(y - \dfrac{h}{\sqrt{5}}\right)^2\right] - (x^2 - 2xy + y^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4xh}{\sqrt{5}} + \dfrac{4h^2}{5} - \dfrac{4yh}{\sqrt{5}} + \dfrac{2xh}{\sqrt{5}} + \dfrac{4h^2}{5} - \dfrac{2yh}{\sqrt{5}} + \dfrac{h^2}{5}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{6x}{\sqrt{5}} - \frac{6y}{\sqrt{5}} + \frac{9h}{5}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}}(x - y).$$

■

Vamos obter ferramentas que nos permita encontrar a derivada direcional de uma forma mais razoável.

**Teorema 1.15.1** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $U = \cos(\theta)i + \text{sen}(\theta)j$, então:*

$$D_{\boldsymbol{U}}f(x,y) = f_x(x,y)\cos(\theta) + f_y(x,y)\text{sen}(\theta).$$

**Demonstração:** Não será feita nessas notas. ■

**Exemplo 1.15.3** *Use o Teorema 1.15.1 para resolver os Exemplos 1.15.1 e 1.15.2.*

**Solução:** Para o Exemplo 1.15.1, como $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$, $\mathbf{U} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $f_x = 6x + 4$ e $f_y = -2y$, segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = (6x+4)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-2y)\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - y,$$

que coincide com a resposta obtida em 1.15.1.

Para o Exemplo 1.15.2, como $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$, $\mathbf{U} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$, $f_x(x,y) = 2x - 2y$ e $f_y(x,y) = 2x - 2y$, temos que

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = (2x-2y)\frac{2}{\sqrt{5}} + (-2x+2y)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6x-6y}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}(x-y),$$

que coincide com a resposta obtida em 1.15.2. ■

**Exemplo 1.15.4** *Seja $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$. Calcule $D_{\boldsymbol{U}}f(x,y)$, sendo $\boldsymbol{U}$ o versor de cada um dos vetores a seguir.*

*a)* $\vec{v} = (-1,1)$; *b)* $\vec{v} = (1,2)$; *c)* $\vec{v} = (1,1)$.

**Solução:**

a) Temos que $||\vec{v}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dessa forma,

$$\mathbf{U} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Assim, como $f_x(x,y) = 2x - y$ e $f_y(x,y) = 2y - x$, seque que

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = f_x(x,y)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + f_y(x,y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= (2x-y)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + (2y-x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-3x+3y}{\sqrt{2}}.$$

b) Temos que $||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Dessa forma, temos que

$$\mathbf{U} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Assim, como $f_x(x,y) = 2x - y$ e $f_y(x,y) = 2y - x$, seque que

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = f_x(x,y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + f_y(x,y)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= (2x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + (2y-x)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3y}{\sqrt{5}}.$$

c) Temos que $||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dessa forma, temos que

$$\mathbf{U} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Assim, como $f_x(x, y) = 2x - y$ e $f_y(x, y) = 2y - x$, seque que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y).v_1 + f_y(x, y)v_2 =$$

$$= (2x - y)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (2y - x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x + y}{\sqrt{2}}.$$

■

**Exemplo 1.15.5** *Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule a derivada direcional da função $f$ na direção do vetor $\boldsymbol{U} = (2, -3)$.*

**Solução:** Temos que $||\mathbf{U}|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. Dessa forma, temos que o versor do vetor $\mathbf{U}$ é dado por

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{U}}{||\mathbf{U}||} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

Como $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = 2y$, seque que

$$D_{\mathbf{V}}f(x, y) = f_x(x, y) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + f_y(x, y) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) =$$

$$= 2x\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + 2y\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{4x + 6y}{\sqrt{13}}.$$

■

Como já mencionado, não podemos esquecer que a derivada parcial é um caso particular da derivada direcional, sendo que $f_x(x, y)$ é $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$, quando $\mathbf{U} = (1, 0)$ e $f_y(x, y)$ é $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$, quando $\mathbf{U} = (0, 1)$. Outra observação importante que merece destaque é sobre o sentido do vetor $\mathbf{U}$. Não se esqueça que o vetor $-\mathbf{U}$ é o oposto ao vetor $\mathbf{U}$ e, por isso, a informação obtida com $D_{-\mathbf{U}}f(x, y)$ é oposta a obtida com $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$. Agora, vamos a uma interpretação geométrica para a derivada direcional de funções reais de duas variáveis.

## Interpretação Geométrica da Derivada Direcional

A derivada direcional dá a razão de variação do valor da função $f(x, y)$ em relação à distância no plano $XY$ medida na direção do vetor $\mathbf{U}$, uma ilustração é dada pela Figura 1.24.

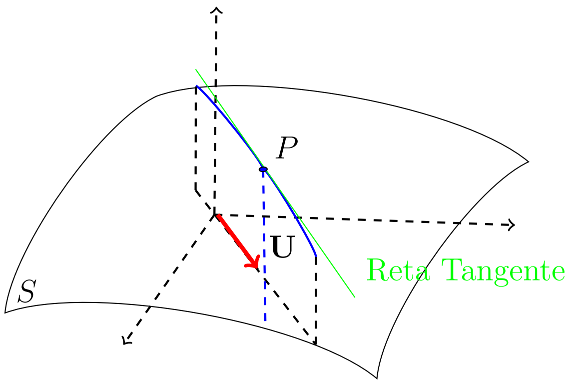


Figura 1.24: Interpretação Geométrica da Derivada Direcional.

A equação da superfície $S$ na Figura 1.24 é $z = f(x, y)$. O ponto $P \in S$ tem coordenadas $P = (a, b, c)$. A curva de interseção de $S$ com o plano $\alpha$ que contém $P$ e tem direção dada pelo vetor $\mathbf{U} = (\cos(\theta), sen(\theta)$ é dada pela equação $C(t) = (x(t), y(t), z(t)$, com $t \in I \subset \mathbb{R}$ ($I$ é un intervalo). Dessa forma, temos que derivada direcional $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$, calculada no ponto $P$ dá a inclinação da reta tangente à curva $C$, em $P$, no plano $\alpha$.

**Exemplo 1.15.6** *Seja $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ uma distribuição de temperatura no plano $XY$. Determine a taxa de variação da temperatura na direção do vetor $\boldsymbol{U}$ que faz um ângulo de $\dfrac{\pi}{5}$ com o semieixo positivo das abscissas.*

**Solução:** A taxa de variação procurada é a derivada direcional de $f$ na direção do vetor $\mathbf{U}$. Daí, como $\mathbf{U} = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right), \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$, segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + f_y(x, y)\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= (-4x)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + (-2y)\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2\left(2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - y\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right).$$

Portanto, a taxa de variação da temperatura na direção do vetor que faz um ângulo de $\dfrac{\pi}{5}$ com o semieixo positivo das abscissas é

$$D_U f(x, y) = -2\left(2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - y\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right).$$

■

**Exemplo 1.15.7** *Encontre a inclinação da reta tangente $r_T$ dada pela interseção da superfície $f(x, y) = 3x^2 - 5xy^2 + 3y^2$ com o plano $\alpha$ que contém o ponto $P = (1, 0)$ e é paralelo ao vetor $v = (-1, -1)$.*

**Solução:** A inclinação da reta tangente $r_T$ procurada é igual ao valor da derivada direcional $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$ da função $f$, na direção do vetor $\mathbf{U}$, onde $\mathbf{U} = \dfrac{v}{||v||}$. Como $||v|| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, então, temos que $\mathbf{U} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$. Dessa forma, segue que

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + f_y(x, y)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= (6x - 5y^2)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + (-10xy + 6y)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(6x - 10xy + 6y - 5y^2)(-1)}{\sqrt{2}}.$$

Como $P = (1, 0)$, segue que $D_{\mathbf{U}}f(1, 0) = \dfrac{-6}{\sqrt{2}}$. Portanto, a inclinação da reta tangente $r_T$, em $P$, é igual a $\dfrac{-6}{\sqrt{2}}$. ■

A seguir é apresentado a extensão da derivada direcional para funções de três variáveis. A interpretação geométrica é a mesma, ou seja, dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, temos que a derivada direcional de $f$ fornece a razão da variação dos valores funcionais $f(x, y, z)$ em relação à distância no espaço tridimensional, medida na direção do vetor unitário $\mathbf{U}$. Antes precisamos relembrar como definir um vetor unitário em $\mathbb{R}^3$. Observe a Figura 1.25.

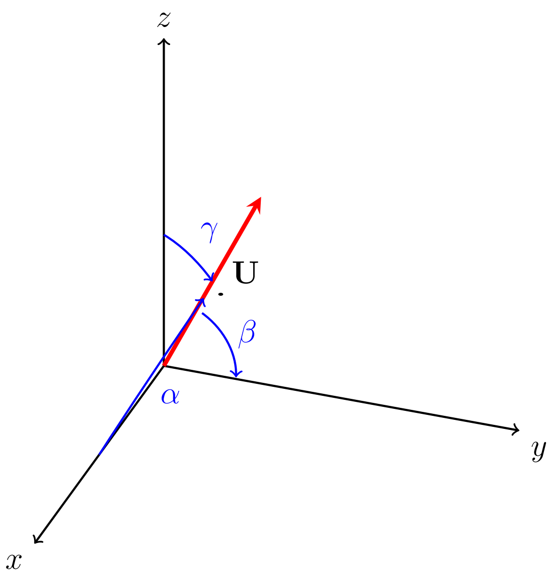


Figura 1.25: Representação de um vetor $\mathbf{U}$ no espaçõ tridimensional e seus ângulos diretores.

Sejam $\alpha$ é o ângulo entre o vetor $\mathbf{U}$ e o vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\beta$ é o ângulo entre o vetor $\mathbf{U}$ e o vetor $\vec{j} = (0, 1, 0)$, e $\gamma$ é o ângulo entre o vetor $\mathbf{U}$ e o vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$,. Então, temos que $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ e $\cos(\gamma)$ são os vetores diretores do vetor $\mathbf{U}$ e, além disso, temos que

$$\mathbf{U} = \cos(\alpha)\vec{i} + \cos(\beta)\vec{j} + \cos(\gamma)\vec{k} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$$

é um vetor unitário. Agora, vamos a definição de derivada direcional para funções reais de três variáveis.

**Definição 1.15.2** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função e seja*

$$\boldsymbol{U} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$$

*um vetor unitário. Então, a* ***Derivada Direcional*** *de $f$ na direção do vetor $\boldsymbol{U}$, denotada por $D_{\boldsymbol{U}}f$, é dada por*

$$D_{\boldsymbol{U}}f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot \cos(\theta), y + h \cdot \cos(\beta), z + h \cdot \cos(\gamma)) - f(x, y, z)}{h},$$

*se esse limite existir.*

■

**Teorema 1.15.2** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $\boldsymbol{U} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ um vetor unitário. Então,*

$$D_{\boldsymbol{U}}f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\cos(\alpha) + f_y(x,y,z)\cos(\beta) + f_z(x,y,z)\cos(\gamma).$$

**Demonstração:** Não será feita nessas notas. ■

**Exemplo 1.15.8** *Dada $f(x,y,z) = 3x^2+xy-2y^2-yz+z^2$, encontre a razão de variação de $f(x,y,z)$ em $(1,-2,-1)$ na direção do vetor $v = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.*

**Solução:** Um vetor unitário $\mathbf{U}$ que tem a mesma direção e sentido do vetor $v = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ é dado por

$$\mathbf{U} = \frac{v}{||v||} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Assim, temos que a derivada direcional de $f$ na direção de $\mathbf{U}$ fica dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y,z) = \frac{2}{3}(6x+y) - \frac{2}{3}(x-4y-z) - \frac{1}{3}(-y+2z).$$

Portanto, a razão de variação de $f(x,y,z)$ em $(1,-2,-1)$ na direção de $\mathbf{U}$ é dada por

$$D_{\mathbf{U}}f(1,-2,-1) = \frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(0) = -4.$$

■

Agora, vamos aos exercícios.

## 1.16 Exercícios

**Exercício 1.16.1** *Nos itens a seguir, encontre a derivada direcional da função dada na direção do versor do vetor $\boldsymbol{U}$.*

*a)* $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2$, *sendo* $\boldsymbol{U} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}$;

*b)* $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, *sendo* $\boldsymbol{U} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$;

*c)* $f(x,y,z) = 3x^2+y^2-4z^2$, *sendo* $\boldsymbol{U} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{k}$;

*d)* $f(x,y,z) = 6x^2 - 2xy + yz$, *sendo* $\boldsymbol{U} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$;

*e)* $f(x,y) = y^2\tan^2(x)$, *sendo* $\boldsymbol{U} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{j}$, *no ponto* $P = \left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$;

*f)* $f(x,y,z) = xyz$, *sendo* $\boldsymbol{U} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, *no ponto* $P = (1,1,1)$;

*g)* $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$, *sendo* $\boldsymbol{U} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, *no ponto* $P = (1,2,-1)$.

**Exercício 1.16.2** *A densidade* $\rho(x,y)$ $kg/m^2$ *em todos os pontos de uma placa é dada por*

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+3}}.$$

*Qual o valor da taxa de variação da densidade no ponto* $(3,2)$, *na direção do vetor* $\boldsymbol{U} = \cos(\frac{2\pi}{3})\vec{i} + sen(\frac{2\pi}{3})\vec{j}$?

**Exercício 1.16.3** *Calcule a derivada direcional de* $f$ *no ponto* $P$ *dado, na direção do vetor* $\boldsymbol{U}$ *que é versor do vetor* $\overrightarrow{PQ}$, *sendo* $f(x,y) = e^x \arctan(y)$, $P = (0,1)$ *e* $Q = (3,5)$.

**Exercício 1.16.4** *Calcule a derivada direcional de* $f$ *no ponto* $P$ *dado, na direção do vetor* $\boldsymbol{U}$ *que é versor do vetor* $\overrightarrow{PQ}$, *sendo* $f(x,y) = e^x \cos(y) + e^y \text{sen}(x)$, $P = (1,0)$ *e* $Q = (-3,3)$.

**Exercício 1.16.5** *Faça um mapa topográfico mostrando as curvas de nível da função* $f(x,y) = e^{2xy}$ *em* $e^8$, $e^4$, $1$, $e^{-4}$ *e* $e^{-8}$. *Faça também a representação do vetor* $\vec{v} = (f_x(2,1), f_y(2,1))$ *a partir do ponto* $(2,1)$.

**Exercício 1.16.6** *Encontre a inclinação da reta tangente* $r_T$ *dada pela interseção da superfície* $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ *com o plano* $\alpha$ *que contém o ponto* $P = (1,2,11)$ *e é paralelo ao vetor que faz um ângulo de* $\frac{\theta}{6}$ *com o semi-eixo positivo* $x$.

**Exercício 1.16.7** *Encontre a inclinação da reta tangente* $r_T$ *dada pela interseção da superfície* $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ *com o plano* $\alpha$ *que contém o ponto* $P = (2,-1,0)$ *e é paralelo ao vetor* $v = (2,5)$.

**Exercício 1.16.8** *Seja* $T(x,y,z) = xsen(yz)$ *uma distribuição de temperatura no espaço tridimensional. Determine a taxa de variação da temperatura na direção do vetor* $v = (1,2,-1)$ *no ponto* $(1,3,0)$.

**Exercício 1.16.9** *Suponha que a temperatura no ponto (x, y, z) do espaço seja dada por*

$$T(x,y,z) = \frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2},$$

*em que* $T$ *é a medida, em graus Celsius, da temperatura e* $x, y$ *e* $z$ *estão em metros. Em que direção no ponto* $(1,1,?2)$ *a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?*