5.4 Conjuntos Compactos

Estamos estudando algumas noções topológicas em $\mathbb{R}$ e, por isso, a definição de *Conjunto Compacto* dada a seguir é um bom caminho. Dependendo do espaço em estudo, essa definição pode não ser uma boa escolha e, por isso, outra definição é utilizada.

Definição 5.4.1 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é chamado de Compacto quando X é fechado e limitado.*

Exemplo 5.4.1 *a) Todo conjunto finito é compacto.*

b) Qualquer intervalo da forma $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ é compacto.

c) Os intervalos da forma $]a, b]$, $[a, b[$ e $]a, b[$ não são compactos, pois todos não são fechados.

d) Os intervalos $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ e $]-\infty, b[$ não são compactos, pois não são limitados.

e) $\mathbb{Z}$ não é compacto, pois não é limitado.

f) $[a, b] \cup [c, d]$ é um conjunto compacto.

■

Observe que um conjunto formado por um único ponto é fechado, já que o seu complementar, $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ é aberto. Em consequência disso, um conjunto finito, também é um conjunto fechado, já que ele é a união finita de conjuntos fechados.
De uma forma mais geral, o conjunto $\mathbb{Z}$ é um conjunto fechado, pois o seu complementar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é a união de conjuntos disjuntos $(n, n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$ que é aberto. A seguir vamos apresentar uma caracterização de conjuntos compactos.

Teorema 5.4.1 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$: Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então, X é limitado e, por isso, toda sequência de elementos de X é limitada. Assim, pelo Teorema de Bolsano-Weierstrass, toda sequência de elementos de X possui uma subsequência convergente e, sendo X fechado, o limite dessa sequência tem que estar em X.

$(\Leftarrow)$: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente para um ponto de X.

- Temos que X é limitado pois, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar $x_n \in X$ tal que $|x_n| > n$ e, consequentemente, a sequência (x_n), assim obtida, não possuiria uma subsequência convergente.

- Temos que X é fechado pois, caso contrário, existiria um ponto $a \notin X$, com $x_n \to a$ e $x_n \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por isso, essa sequência e, todas as suas subsequências, não convergem para um ponto de X, contrariando a hipótese.

Portanto, X é limitado e fechado e, consequentemente, X é compacto. ∎

Observação 5.4.1 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então, X é fechado e, por isso, se $a = \inf X$ e $b = \sup X$, segue que $a, b \in X$. Então, $a \le x \le b$, para todo $x \in X$. Em outras palavras, todo conjunto compacto possui elemento mínimo e elemento máximo.*

O resultado a seguir generaliza o princípio dos intervalos encaixado, dado no Teorema 2.3.2.

Teorema 5.4.2 *Dada uma sequência decrescente*

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$$

de conjuntos compactos e não-vazios, então, existe pelo menos um número real que pertence a todos os conjuntos X_n.

Demonstração: Definia uma sequência (x_n) escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X_n$. Essa sequência está em X_1, visto que todos os elementos estão em algum X_n. Como X_1 é compacto, existe $a \in X_1$ tal que $x_{n_k} \to a$, onde (x_{n_k}) é uma subsequência que converge para pontos de X_1.
Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n_k > n$, então, $x_{n_k} \in X_n$ e, sendo X_n compacto, segue que $a \in X_n$ e, portanto, $a \in X_n$, para todo n. ∎

Definição 5.4.2 *Chama-se Cobertura de um conjunto X a qualquer família $\mathcal{C}$ de conjuntos C_λ $(\lambda \in L)$ tal que*

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda.$$

Assim, se $\mathcal{C}$ é uma cobertura para X, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Definição 5.4.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura para o conjunto X. Se todos os conjuntos $C_\lambda \in \mathcal{C}$ são conjuntos abertos, então, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma Cobertura Aberta.*

Definição 5.4.4 *Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura para o conjunto X. Se L é um conjunto finito, então, $\mathcal{C}$ é dita ser uma Cobertura Finita.*

Definição 5.4.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura para o conjunto X. Se $L' \subset L$ é tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então, dizemos que $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ é uma Subcobertura da cobertura $\mathcal{C}$.*

Exemplo 5.4.2 *1. Seja $X = \mathbb{R}$. Tome $L = \mathbb{Z}$ e $C_n = [n, n+1]$. Então, temos que $X \subset \bigcup_{n \in L} C_n$ e, por isso, $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura para $\mathbb{R}$.*

2. *Seja $X = \mathbb{R}$. Tome $C_1 =]-\infty, 0]$ e $C_2 = [0, +\infty[$. Então, temos que $X \subset C_1 \cup C_2$ e, por isso, $\mathcal{C}$ é uma cobertura finita para $\mathbb{R}$.*

3. *Seja $X = [-1, 2]$. Tome $L = \mathbb{Z}$ e $C_n = [n, n+1]$. Então, temos que $X \subset \bigcup_{n \in L} C_n$. Porém, como $\mathcal{C}' = \{[-1, 0], [0, 1], [1, 2]\}$, segue que $\mathcal{C}'$ é uma subcobertura finita para X.*

Teorema 5.4.3 *(Teorema de Borel-Lebesgue): Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.*

Demonstração: Tome inicialmente uma cobertura aberta $[a, b] \subset \bigcup_{n \in L} A_n$, digamos $\mathcal{C}$, para o intervalo compacto $[a, b]$ e suponha que $\mathcal{C}$ não admita uma subcobertura finita.
Tome o ponto médio de $[a, b] = [a_0, b_0]$. Assim o intervalo é decomposto em dois subintervalos de comprimento $\frac{b-a}{2}$ sendo que, pelo menos um desses subintervalos que chamaremos de $[a_1, b_1]$, não pode ser coberto por um número finito de conjuntos de A_λ. Assim, por bisseções sucessivas obtemos uma sequência decrescente $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset$ de compactos encaixados com $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ e com nenhum desses intervalos $[a_n, b_n]$ tendo uma subcobertura finita de abertos A_λ. Além disso, existe um número real $c \in [a, b]$ tal que $c \in [a_n b_n]$, para todo n (Teorema 2.3.2).
Pela definição de cobertura, existe um índice $\lambda_0 \in L$ tal que $c \in A_{\lambda_0}$. Como A é aberto, existe um $\epsilon > 0$ tal que $[c - \epsilon, c + \epsilon] \subset A_{\lambda_0}$. Assim, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$, segue que $[a_n, b_n] \subset [c - \epsilon, c + \epsilon] \subset A_{\lambda_0}$ e, por isso, $[a_n, b_n]$ admite uma subcobertura de um conjunto, o que é uma contradição. Portanto, $[a, b]$ admite uma subcobertura finita.
Para o caso geral, seja X um conjunto compacto e $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, podemos considerar um intervalo $[a, b]$ tal que $X \subset [a, b]$, visto que X é limitado. Seja a nova cobertura de $[a, b]$ dada por $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup (\mathbb{R} \setminus X)$. Então, $[a, b]$ admite uma subcobertura finita, digamos, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup (\mathbb{R} \setminus X)$ e, consequentemente, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ é uma subcobertura finita para X. ■

Exemplo 5.4.3 *Os intervalos $\left(\frac{1}{n}, 2\right)$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma cobertura para o intervalo $(0, 1]$, visto que $(0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 2\right)$. Contudo, essa subcobertura não possui uma subcobertura finita, visto que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ e, por isso, toda subcobertura finita estaria contida no aberto de maior índice e, por isso, não conteria o conjunto $(0, 1]$.*