6.2 Limites Laterais

Definição 6.2.1 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que o número real a é um Ponto de Acumulação à Direita para X, e escrevemos $a \in X'_+$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto de $x \in X$, com $x > a$.*

Observação 6.2.1 *Existem algumas equivalências para Definição 6.2.1, onde destacamos:*

1. *$a \in X'_+$ se para todo $\epsilon > 0$, temos que $X \cap (a, a+\epsilon) \neq \varnothing$.*
2. *Para que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que a seja o limite de uma sequência $(x_n) \subset X$, tal que $x_n > a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$a \in X'_+$ se, e somente se, $a \in Y'$, sendo $Y = X \cap (a, +\infty)$.*

Definição 6.2.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que o número real a é um Ponto de Acumulação à Esquerda para X, e escrevemos $a \in X'_-$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto de $x \in X$, com $x < a$.*

Observação 6.2.2 *Da mesma forma que para ponto de acumulação à direita, existem algumas equivalências para Definição 6.2.2, onde destacamos:*

1. *$a \in X'_-$ se para todo $\epsilon > 0$, temos que $X \cap (a-\epsilon, a) \neq \varnothing$.*
2. *Para que $a \in X'_-$ é necessário e suficiente que a seja o limite de uma sequência $(x_n) \subset X$, tal que $x_n < a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$a \in X'_-$ se, e somente se, $a \in Z'$, sendo $Z = X \cap (-\infty, a)$.*

Definição 6.2.3 *Se $a \in X'_- \cap X'_+$, então, dizemos que a é um ponto de Acumulação Bilateral de X.*

Exemplo 6.2.1

1. *Se $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, então, $0 \in X'_+$. Além disso, $X'_- = \varnothing$.*
2. *Seja I um intervalo. Para todo $c \in \mathring{I}$, segue que $c \in I'_- \cap I'_+$. Se c é o extremo inferior de I, então, $c \in I'_+$. Se c é o extremo superior de I, então, $c \in I'_-$.*
3. *Seja K o conjunto de Cantor. Já provamos que todo ponto do conjunto K é um ponto de acumulação (Teorema 5.5.1). Assim, se $k \in K$ é o extremo de algum dos intervalos omitidos numa das etapas da construção do conjunto K, então, ou $k \in K'_-$ ou $k \in K'_+$. Caso contrário, $k \in K'_- \cap K'_+$.*

Definição 6.2.4 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+$. Dizemos que o número real L é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a pela direita, e escrevemos,*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = L,$$

quando para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

De uma maneira simbólica podemos escrever:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L := \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0; x \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 6.2.5 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_-$. Dizemos que o número real L é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda, e escrevemos,*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

quando para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < a - x < \delta$.

De uma maneira simbólica podemos escrever:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L := \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0; x \in X \cap (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação 6.2.3 *1. As propriedades desenvolvidas na Seção 6.1 podem ser adaptadas para os limites laterais.*

2.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x).$$

Exemplo 6.2.2 *1. Seja g a função dada por*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = \dfrac{x}{|x|} \end{array}.$$

Então, g não possui limite quando x tende a zero, visto que

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1.$$

2. Seja h a função dada por

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}.$$

Então, h não possui limite quando x tende a zero, visto que

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^-} h(x) = -\infty.$$

3. Seja f a função dada por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \end{array}.$$

Então, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. Por outro lado, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe.

4. *Seja f a função Maior Inteiro (ou Parte Inteira) dada por*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = [\![x]\!] = n, \forall\, n \leq x < n+1 \end{array}.$$

Então, para $a \in \mathbb{Z}$, temos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a - 1$ e, por isso, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, para $a \in \mathbb{Z}$, não existe. Caso $a \notin \mathbb{Z}$, temos que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = [\![a]\!] = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Definição 6.2.6 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser Monótona Crescente quando para $x, y \in X$, com $x < y$, temos que $f(x) < f(y)$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser Monótona Não-Decrescente quando para $x, y \in X$, com $x < y$, temos que $f(x) \leq f(y)$.*

Definição 6.2.7 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser Monótona Decrescente quando para $x, y \in X$, com $x < y$, temos que $f(x) > f(y)$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser Monótona Não-Crescente quando para $x, y \in X$, com $x < y$, temos que $f(x) \geq f(y)$.*

Definição 6.2.8 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser Monótona se ela for crescente, ou decrescente, ou não-decrescente ou não-crescente.*

Teorema 6.2.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $a \in X'_+$ e todo $b \in X'_-$, segue que existem $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $M = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.*

Demonstração: Suponha que a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente. Seja $L = \inf\{f(x); x \in X, x > a\}$. Dado $\epsilon > 0$, então, $L + \epsilon$ não é cota inferior do conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta \in X$ e $L \leq f(a + \delta) < L + \epsilon$. Como f é não decrescente, $x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow L \leq f(x) < L + \epsilon$ e, por isso, $L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
Analogamente, seja $M = \sup\{f(x); x \in X, x < b\}$. Dado $\epsilon > 0$, então, $M - \epsilon$ não é cota superior do conjunto $\{f(x); x \in X, x < b\}$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $b - \delta \in X$ e $M - \epsilon < f(b - \delta) \leq M$. Como f é não decrescente, $x \in X \cap (b - \delta, b) \Rightarrow M - \epsilon < f(x) \leq M$ e, por isso, $M = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$. ■

O teorema anterior nos garante que os limites laterais quando x tende a a pela direita ou pela esquerda, de uma função monótona limitada, sempre existem, mas não nos garante que o limite da função existe em a. Por outro lado, se $a \in X$, então, não é necessário supor no mesmo teorema que f seja limitada.
De fato: Suponha que a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente e que $a \in X \cap X'_+$. Assim, $f(a)$ é uma cota interior para o conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$ e, consequentemente, um ínfimo desse conjunto. Logo, $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, segue que $f(a)$ é uma cota superior para o conjunto $\{f(x); x \in X, x < a\}$ e, consequentemente, um supremo desse conjunto. Logo, $f(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. □