2.7 A Integral Tripla

A extensão de integral dupla para a integral tripla é análoga À extensão da integral simples para a integral dupla. O Tipo mais simples de região no $\Re^3$ é um paralelepípedo retangular, limitado por seis planos: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$ e $z = c_2$, com $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ e $c_1 < c_2$. Seja f uma função de três variáveis e suponha que f seja contínua acima da região S. Uma partição Δ de S é formada ao dividir S em caixas retangulares, através de planos paralelos aos planos coordenados. Seja n o número de elementos de Δ e seja $\Delta_i V$ a medida do volume da i-ésima caixa. Escolha um ponto arbitrário $(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)$ na i-ésima caixa. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)\Delta_i V. \tag{2.11}$$

A norma $||\Delta||$ da partição é o comprimento da maior diagonal das caixas. Se as somas da forma 2.11 tende a um limite quando $||\Delta||$ tende a zero para qualquer escolha de $(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)$, então esse limite é chamado de *Integral Tripla* de f em S e escrevemos:

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)\Delta_i V.$$

Uma condição suficiente para a existência da integral tripla de f em S é que f seja contínua em S.

Da mesma forma que uma integral dupla é igual a uma integral iterada duas vezes, a integral tripla é o mesmo que uma integral iterada três vezes. Quando S é o paralelepípedo descrito acima e f é contínua em S, então:

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dzdydx.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.7.1 *Calcule a integral tripla* $\int\int\int_S xysen(yz)dV$*, sabendo que* S *é o paralelepípedo retangular, limitados pelos planos* $x = \pi$*,* $y = \frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{\pi}{3}$ *e pelos planos coordenados.*

Solução: Temos que:

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV = \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} xysen(yz)dzdydx =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - cos(\frac{\pi y}{3}))dydx = \int_0^{\pi} x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi}sen(\pi^2/6)\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\pi^2 - 6sen(\pi^2/6)\right).$$

■

Para uma região S do $\Re^3$, onde f é contínua, mas que não é um paralelepípedo, pode ser feita uma mesma discussão. Seja S a região tridimensional fechada, limitada pelos planos $x = a$, $x = b$, pelos cilindros $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ e pelas superfícies $z = F_1(x, y)$ e $z = F_2(x, y)$, onde as funções $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ são suaves (isto é, tem derivadas ou derivadas parciais contínuas). Construa planos paralelos aos planos coordenados, formando um conjunto de paralelepípedos que cubram completamente S. Os paralelepípedos que estão inteiramente dentro de S ou sobre a sua fronteira formam uma partição Δ de S. Escolha algum sistema de numeração, de tal forma que eles sejam numerados de 1 a n. A norma $||\Delta||$ dessa partição é o comprimento da maior diagonal de qualquer paralelepípedo pertencente à partição Δ. Seja $\Delta_i V$ a medida do volume do i-ésimo paralelepípedo. Seja a função de três variáveis, contínua em S, e seja $(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)$ um ponto arbitrária do i-ésimo paralelepípedo. Forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)\Delta_i V.$$

Se a soma tiver um limite quando a norma $||\Delta||$ tender a zero, e se este limite for independente da escolha dos planos da partição e dos pontos arbitrários $(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)$, em cada paralelepípedo, então este limite é chamado de integral tripla de f em S e escrevemos:

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dV = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \phi_i, \gamma_i)\Delta_i V. \tag{2.12}$$

É provado em cálculo avançado que uma condição suficiente para a existência do limite da Equação 2.12 é que f seja contínua em S. Além disso, sob as condições impostas às funções ϕ_1, ϕ_2, $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$, pode ser provado também que a integral tripla pode ser calculada pela integral iterada

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx.$$

Da mesma forma que a integral dupla pode ser interpretada como sendo a medida da área de uma região plana quando $f(x, y) = 1$ em R, a integral tripla pode ser interpretada com sendo a medida do volume de uma região tridimensional. Se $F(x, y, z) = 1$ em S, então:

$$\int\int\int_S dV = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V,$$

e a integral tripla é a medida do volume da região S.

Exemplo 2.7.2 *Ache, por integral tripla, o volume do sólido que está acima do plano XY, limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.*

Solução: A figura que representa este sólido é a Figura 2.4. Se V unidades de volume representa o volume do sólido, então:

$$V = \int\int\int_S dV,$$

onde S é a região limitada pelos sólidos. Os limites de z são $z = 0$ e $z = x^2 + 4y^2$. No primeiro octante, que representa $\frac{1}{4}$ do volume desejado, o valor de y sofre uma variação de 0 até $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$. Os limites de x, também no primeiro octante, vão de 0 até 2. Calculando a integral tripla obtemos:

$$V = 4\int_0^2\int_0^{(\sqrt{4-x^2})/2}\int_0^{x^2+4y^2} dV = 4\int_0^2\int_0^{(\sqrt{4-x^2})/2}(x^2+4y^2)dydx.$$

Essa integral é a mesma obtida no Exemplo 2.3.3. ■

Exemplo 2.7.3 *Ache o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 25$, pelos planos $x + y + z = 8$ e pelo plano XY.*

Solução: Os limites de z são de 0 à $8 - x - y$, que são os valores de z no plano. Os limites de y são obtidos da região de fronteira no plano XY que é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$. Assim, se $-5 \leq x \leq 5$, tem-se que $-\sqrt{25 - x^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}$. Sendo V unidades de volume o valor do volume procurado, temos que:

$$V = \int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{-\sqrt{25-x^2}}\int_0^{8-x-y} dzdydx.$$

Dessa forma, $V = \int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{-\sqrt{25-x^2}}(8 - x - y)dydx = \int_{-5}^{5}(8-x)\sqrt{25-x^2}dx = 200\pi$, ou seja, o volume de S é de 200π unidades de volume. ■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.

2.8 Exercícios

Exercício 2.8.1 *Calcule o valor de cada integral.*

a) $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{2y}^{1+y^2} xdzdydx;$

b) $\int_1^2\int_0^{x}\int_1^{x+xy} xydzdydx;$

c) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2-y} zdxdzdy;$

d) $\int_{-1}^0\int_e^{2e}\int_0^{\pi/3} yln(z)tg(x)dxdzdy;$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_z^{\pi/2}\int_0^{xz} cos\frac{y}{z}dydxdz;$

Exercício 2.8.2 *Calcule a integral tripla* $\int\int\int_S ydV$*, sendo* S *a região limitada pelo tetraedro formado pelos planos* $12x+20y+15z=60$ *e pelos planos coordenados.*

Exercício 2.8.3 *Calcule a integral tripla* $\int\int\int_S ydV$*, sendo* S *a região limitada pelo tetraedro formado pelos pontos* $(0,0,0)$*,* $(1,1,0)$*,* $(1,0,0)$*,* $(1,0,1)$.

Exercício 2.8.4 *Ache as inclinações das retas tangente à curva de intersecção da superfície* $x^2+y^2+z^2=9$ *com os planos* $y=2$ *no ponto* $(1,2,2)$.