3.3 Derivada Direcional e Vetor Gradiente de Campos Escalares

Vamos iniciar essa seção com a definição de *Derivadas Direcionais*.

Definição 3.3.1 *Considere um campo escalar dado pela função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tome um ponto P no campo escalar e uma direção dada por um vetor unitário $\vec{b}$. Seja r reta passando por P e que tenha direção dada por $\vec{b}$. Seja Q um ponto sobre r e chame a distância entre Q e P por s. Se o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s},$$

existe, então, ele é chamado de Derivada Direcional de f em P, na direção de $\vec{b}$.

Uma representação geométrica para a definição de derivada direcional em $\mathbb{R}^2$ é apresentado na Figura 3.8.

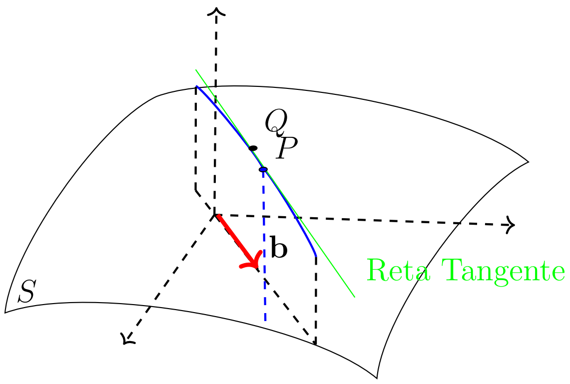

Figura 3.8: Ilustração da definição de derivada direcional de um campo escalar em $\mathbb{R}^2$.

Em outras palavras, dada uma superfície S e uma direção dada por um vetor $\vec{b}$, se tomarmos um plano que contenha $\vec{b}$ e que intersecta a superfície, obteremos uma curva. Logo, tomando a reta tangente a esta curva obtida, teremos a derivada direcional procurada.

Ainda, podemos observar que as derivadas parciais são casos particulares de derivadas direcionais, quando são todas as direções dos vetores da base canônica, ou seja, no espaço as direções de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Temos ainda que existem infinitas derivadas direcionais de f em P, visto que existem infinitas direções $\vec{b}$ que podemos considerar.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.3.1 *Calcule a derivada direcional do campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$, em $P = (2, 1)$, na direção de $\vec{v} = (-1, 2)$.*

Solução: Um vetor unitário $\vec{w}$, na direção de $\vec{v}$ é dado por

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-1, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Dessa forma, um ponto Q na semirreta que contém $\vec{\omega}$ fica dado por $s\vec{\omega}$ e, consequentemente,

$$\overrightarrow{PQ} = s\vec{\omega} \Rightarrow Q - P = s\vec{\omega} \Rightarrow Q = P + s\vec{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \left(2 - \frac{s}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}\right).$$

Logo, a derivada direcional fica dada por

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{f\left(2 - \frac{s}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}\right) - f(2,1)}{s} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{s} = \lim_{s \to 0} s = 0.$$

■

Exemplo 3.3.2 *Determine a derivada direcional do campo escalar*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2,$$

em $P = (1,2,2)$*, na direção do vetor* $\vec{a} = (1,2,2)$*.*

Solução: Um vetor unitário na direção de $\vec{a}$ é dado por

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Logo, como $Q = P + s\vec{\omega}$, segue que $Q = \left(1 + \frac{s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}\right)$ e, por isso,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{s \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}, 2 + \frac{2s}{3}\right) - f(1,2,2)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{-2s - \frac{s^2}{3}}{s} = -2.$$

■

Conhecendo a derivada direcional de um campo escalar, fica natural pensar que seja possível desenvolver métodos que tornam o seu cálculo mais prático. Para isso, vamos definir um primeiro operador que utilizaremos a partir de agora. Esse operador é conhecido por *Gradiente* de um campo escalar, que vai ser apresentado a seguir.

Definição 3.3.2 *O vetor Gradiente de um campo escalar* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, denotado por* $grad(f)$ *ou* ∇f*, é o vetor dado por*

$$\nabla f(P) = grad(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right).$$

Observe que o operador gradiente transforma uma função escalar numa função vetorial, essa última formada pelas derivadas parciais de primeira ordem da função escalar. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3.3 *a) Seja* $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$*, um campo escalar definido em* $\mathbb{R}^3$*. Então, temos que*

$$\nabla f(x,y,z) = (4x, 4y, -2z).$$

b) Seja $g(x,y) = x + e^y$*, um campo escalar definido em* $\mathbb{R}^2$*. Então,*

$$grad(g)(x,y) = (1, e^y).$$

c) Seja $h(x,y) = 2x^2 + y^2$*, um campo escalar definido em* $\mathbb{R}^2$ *e* $P = (2,-1)$ *um ponto. Então, para esse ponto* P *específico, temos que*

$$\nabla f(P) = (4x, 2y)|_P = (8, -2).$$

■

Sendo o gradiente de um função escalar $f(x,y,z)$ uma função vetorial, temos que o mesmo define um campo vetorial chamado de *Campo Gradiente*. Dessa forma, podemos fazer a sua representação gráfica.

Exemplo 3.3.4 *Esboce o campo gradiente gerado pela função escalar definida por* $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$*.*

Solução: Temos que $\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = (x,y,z)$. Dessa forma, segue que o campo gradiente desse campo escalar fica dado pela Figura 3.9.

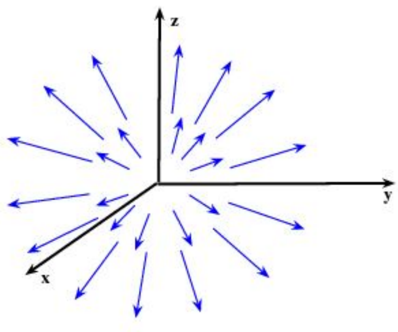

Figura 3.9: Campo Gradiente da função $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

■

Exemplo 3.3.5 *Em um sólido na forma de uma esfera metálica de raio* 3cm*, a temperatura* $T(x,y,z)$ *em cada ponto é proporcional à distância do ponto até a superfície do sólido, sendo o coeficiente de proporcionalidade igual a* 1*. Represente, algebricamente, o campo gradiente gerado por* $T(x,y,z)$*.*

Solução: Vamos considerar que o centro do sólido coincida com a origem do sistema de coordenadas. Desta forma, a distância de qualquer ponto ao centro da esfera é dado por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Logo, temos que a temperatura num ponto $P(x, y, z)$ fica dada por $T(x, y, z) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Portanto,

$$\nabla T(x, y, z) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

■

Observação 3.3.1 *É possível demonstrar que o gradiente de funções escalares apresentam as seguintes propriedades. Sejam, f e g funções escalares tais que existam ∇f e ∇g, e seja k uma constante. Então:*

a) $\nabla(kf) = k\nabla f$*;*

b) $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$*;*

c) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g \cdot \nabla f$*;*

d) $\nabla(f/g) = \dfrac{\nabla f \cdot g - f \cdot \nabla g}{g^2}$*;*

Vamos agora estender a ideia de Curva de Nível. Quanto tomamos funções de duas variáveis, se considerarmos apenas os pontos tais que $f(x, y) = k$, com k constante, teremos então uma curva de nível. Considerando funções com mais variáveis teremos as *Hiperfícies de Nível.* Na definição a seguir tomamos funções de três variáveis, obtendo a definição de *Superfícies de Nível.*

Definição 3.3.3 *Uma Superfície de Nível de um campo escalar $f = f(x, y, x)$, é um superfície formada por todos os pontos de forma que $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante.*

Vamos agora apresentar uma aplicação para o gradiente de uma função. Nesse primeiro caso, vamos mostrar que sob certas condições, o gradiente de uma função é um vetor normal a superfície num ponto dado.

Teorema 3.3.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar tal que, por um ponto P do espaço, passa uma superfície de nível S de f. Se $\nabla f \neq \vec{0}$ em P, então, ∇f é um vetor normal a S em P.*

Demonstração: Seja C uma curva no espaço que passa por P e que esteja contida na superfície de nível S. Represente C por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Como $C \subset S$, temos que $f(\vec{r}) = k$. Então, derivando em relação a t teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Em outras palavras, $\nabla f \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0$. Então, o vetor gradiente ∇f é perpendicular ao vetor $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Como o vetor $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ é tangente a curva C em P, então, temos que ∇f é um vetor normal à curva C em P. Logo, como C é uma curva qualquer em S, temos que ∇f é normal à superfície S. ■

Exemplo 3.3.6 *Determine um vetor normal a superfície $z = x^2 + y^2$, no ponto $P = (1, 0, 1)$.*

Solução: Temos que a superfície pode ser escrita como uma superfície de nível, da seguinte forma: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Assim, como o gradiente pode ser um vetor normal a superfície, basta encontrar $\nabla f(P)$ e verificar se ele satisfaz as hipóteses do teorema.

Como $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -1)$, segue que $\nabla f(P) = (2, 0 - 1) \neq \vec{0}$. Portanto, o vetor $\nabla f(P) = (2, 0 - 1)$ é um vetor normal a superfície $z = x^2 + y^2$, no ponto $P = (1, 0, 1)$. ■

Exemplo 3.3.7 *Determine um vetor perpendicular à circunferência $x^2 + y^2 = 9$, no ponto $P = (2, \sqrt{5})$.*

Solução: O vetor em questão, é um vetor normal , pois ele será perpendicular ao vetor tangente à superfície. Além disso, temos que esta circunferência pode ser vista como uma curva de nível dada por: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9$. Logo, se $\nabla f(P) \neq \vec{0}$, temos que $\nabla f(P)$ será um vetor normal a circunferência.

Dessa forma, como $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ segue que $\nabla f(P) = (4, 2\sqrt{5}) \neq \vec{0}$. Portanto, o vetor $(4, 2\sqrt{5})$ é um vetor perpendicular a circunferência $x^2 + y^2 = 9$, no ponto $(2, \sqrt{5})$. ■

Vamos agora relacionar o cálculo de derivadas direcionais com o gradiente de uma função. Para isso, considere $\vec{a}$ como sendo o vetor posição do ponto P. Então, observando a Figura 3.10, podemos concluir que para um ponto Q sobre a semirreta que tem a direção do vetor $\vec{b}$ e tem origem dada por P, o seu vetor posição é dado por $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)) = \vec{a} + s\vec{b}$.

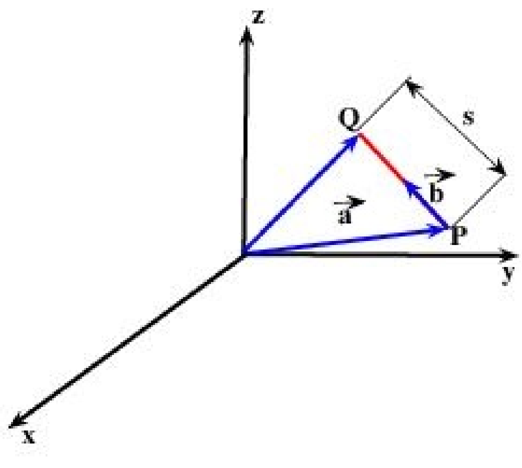

Figura 3.10: Visualização dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Assim, segue que a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, na direção $\vec{b}$ em P, será igual a derivada da função $f(x(s), y(s), z(s))$ em relação a s aplicada em P. Supondo que as derivadas primeiras de f existem e são contínuas, e aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)(P).$$

Como $\vec{r}' = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right) = \vec{b}$, e $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, podemos concluir que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f(P),$$

ou seja, a derivada direcional de uma função f, na direção do vetor unitário $\vec{b}$ aplicada em P, tem o mesmo valor do produto escalar dos vetores $\nabla f(P)$ e $\vec{b}$. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.3.8 *Determine a derivada direcional de* $f(x, y, z) = 5x^2 - 6xy + z$*, no ponto* $P = (-1, 1, 0)$*, na direção do vetor* $\vec{v} = (2, -5, 2)$*.*

Solução: Temos que $\nabla f(x, y, z) = (10x - 6y, 6x, 1)$ e, por isso, $\nabla f(P) = (-16, -6, 1)$. Um vetor unitário da direção do vetor $\vec{v}$, é dado por

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{33}}, \frac{5}{\sqrt{33}}, \frac{2}{\sqrt{33}}\right).$$

Portanto, a derivada direcional de f na direção de $\vec{v}$ em P fica dada por

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \left(\frac{2}{\sqrt{33}}, \frac{5}{\sqrt{33}}, \frac{2}{\sqrt{33}}\right) \cdot (-16, -6, 1) = \frac{-60}{\sqrt{33}}.$$

■

Exemplo 3.3.9 *Determine a derivada direcional de* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$*, no ponto* $P = \left(-1, 2, \dfrac{1}{2}\right)$*, na direção do vetor que une* P *a* $Q = \left(-2, 0, \dfrac{1}{2}\right)$*.*

Solução: Temos que $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow \nabla f(P) = (-2, 4, 1)$. Além disso, temos que um vetor que dá a direção é o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1, -2, 0)$. Logo, um vetor unitário, na direção de $\vec{u}$ é dado por $\vec{b} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$. Portanto, a derivada direcional procurada, é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f(P) = \frac{-6}{\sqrt{5}}.$$

■

Agora vamos falar de outra aplicação do gradiente de uma função. Vamos mostrar que o gradiente aponta para a direção de maior crescimento da função num ponto. Dessa forma, o gradiente também está relacionado com o processo de otimização de funções. Vamos ao teorema.

Teorema 3.3.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar que possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Dessa forma, em cada ponto $P \in D$ para o qual $\nabla f \neq 0$, o vetor ∇f aponta na direção em que f cresce mais rapidamente. Além disso, temos que comprimento do vetor ∇f é a taxa máxima de crescimento de f.*

Demonstração: Como $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P) = \vec{b} \cdot \nabla f(P)$, então, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = |\vec{b}| \cdot |\nabla f(P)| \cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{b}$ e ∇f. Como o vetor $\vec{b}$ tem norma 1, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P) = |\nabla f(P)| \cos(\theta).$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P)$ é máximo quando $\cos(\theta) = 1$, ou seja, quando $\theta = 0$. Logo, a direção de crescimento é máxima quando $\vec{b}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\nabla(f)$, pois nesse caso, $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P) = |\nabla f|$.

Em outras palavras, o vetor ∇f aponta na direção de maior crescimento da função f e a sua norma é a maior taxa de variação do crescimento de f. ■

Exemplo 3.3.10 *Considere uma função f dada por*

$$f(x, y, z) = z - x^2 - y^2.$$

a) Estando no ponto $P = (1, 1, 2)$, que direção e sentido devem ser tomados para que f cresça mais rapidamente?

b) Qual o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P)$?

Solução:

a) A direção e o sentido de maior crescimento de uma função, num determinado ponto, é a mesma direção e sentido dada pelo vetor gradiente no ponto, se $\nabla f \neq \vec{0}$. Dessa forma, a direção e sentido procurada é dada por:

$$\nabla f(x, y, z) = (-2x, -2y, 1) \Rightarrow \nabla f(P) = (-2, -2, 1).$$

b) O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P)$ é dado pela norma do vetor gradiente e, por isso, o valor máximo de crescimento da função em P é dado por

$$||\nabla f|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

■

Exemplo 3.3.11 *Seja $T : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma distribuição de temperatura em uma região do espaço dada por $T(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$. Uma partícula P_1, que está localizada no ponto $P_1(2, 3, 5)$, necessita esquentar-se o mais rápido possível. Outra partícula P_2, localizada em $P_2(0, -1, 0)$, precisa esfriar-se o mais rápido possível.*

a) Qual a direção e o sentido que P_1 deve tomar?

b) Qual a direção e o sentido que P_2 deve tomar?

c) Qual a taxa máxima de crescimento da temperatura em P_1 e qual a taxa máxima de decrescimento da temperatura em P_2?

Solução:

a) A direção e o sentido que P_1 deve tomar para que ele esquente o mais rápido possível é a mesma direção e o mesmo sentido do vetor ∇f. Logo, como $\nabla f(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z)$, seque que P_1 tem que tomar a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_1) = (-4, -6, -10)$.

b) Já no caso de P_2, como a partícula precisa diminuir a sua temperatura o mais rápido possível, segue que P_2 deve tomar a mesma direção do vetor ∇f, mas o sentido tem que ser o oposto. Logo, como $\nabla f(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z)$, seque que P_2 tem que tomar a direção e o sentido do vetor $-\nabla f(P_2) = (0, -2, 0)$.

c) A maior taxa de crescimento ou de decrescimento da temperatura em qualquer ponto é dada pela norma do vetor gradiente. Desta forma, em P_1 a taxa máxima de crescimento é dada por

$$||\nabla f(P_1)|| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 10^2} = \sqrt{152},$$

e em P_2 a maior taxa de decrescimento da temperatura é dada por

$$||\nabla f(P_2)|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.$$

■

Exemplo 3.3.12 *Suponha que a temperatura $T(x, y)$, dada por*

$$T(x, y) = x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2},$$

represente a temperatura da superfície do oceano de uma determinada região do globo terrestre.

a) Qual a taxa de variação da temperatura da água nos pontos $P_0 = (2, 3)$ e $P_1 = (4, 1)$ na direção nordeste?

b) Qual a taxa máxima de variação da temperatura em P_0?

Solução:

a) A taxa de variação de temperatura é dada pela derivada direcional. Considerando $\vec{b}$ como sendo um vetor unitário na direção noroeste, temos que $\vec{b}$ terá a mesma direção e sentido de crescimento da reta bissetriz dos quadrantes ímpares e, por isso, temos que

$$\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Além disso, temos que

$$\nabla f(x,y) = \left(1 - \frac{1}{4}x^2, -\frac{1}{2}y\right).$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P_0) = \nabla f(2,3).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{2}},$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(P_1) = \nabla f(4,1).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-7}{2\sqrt{2}}.$$

b) A taxa máxima de variação de temperatura em P_0, na direção nordeste, é dado pela norma do gradiente, ou seja,

$$||\nabla f(P_0)|| = \sqrt{0 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

■

Exemplo 3.3.13 *Encontre uma equação da reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 4$, no ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$, usando o gradiente de f.*

Solução: Temos que o vetor gradiente é um vetor normal a superfície, quando o mesmo é não nulo. Dessa forma, para qualquer vetor $\vec{a}$ da reta tangente, temos que $\nabla f \cdot \vec{a} = 0$, visto que os dois vetores serão ortogonais.

Sendo assim, considere $P = (x,y)$ e $A = (a,b)$ dois ponto da reta tangente. Então, o vetor $\overrightarrow{PA}$ é perpendicular ao vetor gradiente de f. Daí,

$$r : \nabla f(A).[P - A] = 0 \Leftrightarrow r : (2x, 2y)|_{(\sqrt{3},1)}.[(x,y) - (\sqrt{3}, 1)] = 0.$$

Portanto, uma equação para a reta tangente fica dada por

$$r : 2\sqrt{3}x + 2y - 8 = 0.$$

■

Agora, vamos fazer alguns exercícios. Bons estudos......

3.4 Exercícios

Exercício 3.4.1 *Calcule a derivada direcional de cada uma das funções abaixo, usando o ponto e a direção indicada em cada um dos ítens.*

a) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$, *em* $P = (1,1)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (1,1)$;

b) $f(x,y) = -3x^2 + 4y^5$, *em* $P = (-1,3)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (1,-1)$;

c) $f(x,y) = 2x + y$, *em* $P = (3,-2)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (2,-1)$;

d) $f(x,y) = e^{xy}$, *em* $P = (2,2)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (-1,-1)$;

e) $f(x,y) = x^2 - y^2$, *em* $P = (1,2)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (2,2)$;

f) $f(x,y,z) = xy + z^2$, *em* $P = (2,1,1)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (-1,1,1)$;

g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, *em* $P = (1,1,1)$ *na direção do vetor* $\vec{v} = (-1,-1,-1)$.

Exercício 3.4.2 *Encontre o vetor gradiente de cada uma das funções abaixo.*

a) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$;

b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$;

c) $f(x,y) = 3xy^2 - 2y$;

d) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$;

e) $f(x,y) = arctg(xy)$;

f) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x-y}$;

g) $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x+y}{z}}$;

h) $f(x,y,z) = ze^{x^2-y}$.

Exercício 3.4.3 *Represente geometricamente o campo gradiente definido pelas funções escalares a seguir.*

a) $u(x,y,z) = \dfrac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$;

b) $u(x,y) = 2x + 4y$;

c) $u(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2$;

d) $u(x,y) = 2x - y$;

e) $u(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$.

Exercício 3.4.4 *Determine um vetor normal à superfície dada no ponto indicado.*

a) $2x + 5y + z = 10$ *em* $P = (1, 2, -2)$*;*

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ *em* $P = (0, 0, 0)$*;*

c) $2z = x^2 + y^2$ *em* $P = (1, 1, 1)$*;*

d) $z = x^2 + y^2 - 1$ *em* $P = (-1, 2, 4)$*;*

e) $x^2 + y^2 = z^2$ *em* $P = (3, 4, 5)$*;*

f) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$ *em* $P = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercício 3.4.5 *Em que direção e sentido a função f dada a seguir cresce mais rapidamente no ponto dado e qual a direção e sentido que ela decresce mais rapidamente?*

a) $f(x, y) = (2x + y - 2)^2 + (5x - 2y)^2$, $P = (-1, 2)$*;*

b) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$, $P = (1, 1)$*;*

c) $f(x, y) = e^{xy}$, $P = (2, -1)$*;*

d) $f(x, y) = x^3y^3 - xy$, $P = (3, -2)$*;*

e) $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $P = (-2, -3)$.

Exercício 3.4.6 *Determine dois vetores unitários para os quais a derivada direcional de $f(x, y) = e^{2x+y}$ no ponto $P = (1, 0)$ seja zero.*

Exercício 3.4.7 *Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem, no ponto $P = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, a derivada direcional igual a $\dfrac{2}{5}$ na direção de $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a $\dfrac{11}{5}$ na direção de $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule $\nabla f(P)$ e calcule $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P)$, na direção de $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.*