Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Prova	3^a Avaliação de Álgebra Linear - 04/07/2023
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÂO** ser corrigida.
- Só serão corrigida 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção para não ser considerada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 08:00 as 09:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Use o processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno canônico e a base $B = \{(1,0,1),(0,1,2),(2,1,0)\}$.

Solução: Usando o processo de Ortogonalização de Gram-Schimidt, temos que $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ é um conjunto ortogonal de B se:

- $w_1 = v_1$, ou seja, $w_1 = (1,0,1)$,
- $$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||^2}w_1 = (0,1,2) - \frac{\langle (0,1,2),(1,0,1)\rangle}{||(1,0,1)||^2}(1,0,1) = \\ = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1) \text{ e}$$
- $$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||^2}w_2 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||^2}w_1 = \\ = (2,1,0) - \frac{\langle (2,1,0),(-1,1,1)\rangle}{||(-1,1,1)||^2}(-1,1,1) - \frac{\langle (2,1,0),(1,0,1)\rangle}{||(1,0,1)||^2}(1,0,1) = \\ = (2,1,0) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1,0,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Portanto, o conjunto

$$C_O = \left\{\frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \frac{w_3}{||w_3||}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

é a base ortonormal procurada.

2ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é diagonalizável? Por que?

Solução: O polinômio característico $p(\lambda)$ é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 9 + 9 - 3(5-\lambda) + 9(1-\lambda) + 3(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

Dessa forma, os autovalores de T ficam dados por

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = 1.$$

Observe que para $\lambda_1 = 2$, o $Nuc([T]_B - \lambda_1 I)$ fica dado por:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x + 3y - z & = & 0 \\ -3x + 2y - z & = & 0 \\ -3x + 3y - z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

fazendo a Lina 1 menos a Linha 2 obtemos $y = 0$. Assim, usando a Linha 3, concluímos que $z = -3x$. Logo, $u \in Nuc(A - \lambda_1 I)$ se $u = (x, 0, -3x) = x(1, 0, -3)$. Portanto, $Nuc([T]_B) = [(1, 0, -3)]$ e, por isso, multiplicidade algébrica $\lambda_1 = 2$ e a multiplicidade geométrica $\lambda_1 = 1$. Consequentemente, A não é diagonalizável.

3ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Seja $S = \{(1, 2, 1), (2, 0, -1)\} \in \mathbb{R}^3$. Obtenha o subespaço gerado $V = [S]$.

Solução: Queremos encontrar todos os vetores $v \in V \subset \mathbb{R}^3$ tal que $v = \alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 0, -1)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Assim, como $(x, y, z) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 0, -1)$, segue que $(\alpha + 2\beta, 2\alpha, \alpha - \beta) = (x, y, z)$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & x \\ 2\alpha & = & y \\ \alpha - \beta & = & z \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|l} 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & x - z \\ 0 & 0 & 2x - 3y + 4z \end{array} \right].$$

Portanto,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - 3y + 4z = 0\}.$$

4ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, -y, z)$. Encontre, se existir, os autovalores de T.

Solução: Sendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$, temos que $T(e_1) = (1, 0, 0)$, $T(e_2) = (1, -1, 0)$ e $T(e_3) = (0, 0, 1)$. Consequentemente, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, o polinômio característico $p(\lambda)$ é dado por

$$p(\lambda) = \det([T]_B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda).$$

Dessa forma, os autovalores de T ficam dados por

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

5ª Questão (   ) (Valor 6.0 Pontos): Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y - z$. Encontre $Im(T)$ e $N(T)$.

Solução: Observe que $N(T) = \{u \in \mathbb{R}^3;\ T(u) = 0\}$, ou seja,

$$T(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y.$$

Portanto, $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x + y\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $N(T)$ é o subespaço de dimensão dois gerado pelo conjunto $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Por outro lado, como $Im(T) \subset \mathbb{R}$ e $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} N(T) + \dim_{\mathbb{R}} Im(T)$, segue que $\dim_{\mathbb{R}} Im(T) = 1$ e, consequentemente, $Im(T) = \mathbb{R}$.

6ª Questão(   ) (Valor 6.0 Pontos): Seja $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, -2, -2)\}$ um conjunto de $V = \mathbb{R}^3$. Mostre que S é uma base ortogonal de V. Obtenha uma base ortonormal de S e reescreva todo $v \in V$ usando o produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$ na nova base.

Solução: Temos que S é uma base de V se for um conjunto LI, visto que a dimensão de V é três e S tem três vetores. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 = -4 \neq 0,$$

segue que S é LI e, portanto, uma base de V.

Além disso, temos que:

- $\langle (1, 0, 0), (0, -1, 1) \rangle = 0 + 0 + 0 = 0,$
- $\langle (1, 0, 0), (0, -2, -2) \rangle = 0 + 0 + 0 = 0,$
- $\langle (0, -1, 1), (0, -2, -2) \rangle = 0 + 2 - 2 = 0,$
- $||(1, 0, 0)|| = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,$
- $||(0, -1, 1)|| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2},$
- $||(0, -2, -2)|| = \sqrt{0 + 2 + 2} = 2\sqrt{2},$

e, por isso, S é uma base ortogonal de V, mas não é ortonormal. Para obter uma base ortonormal de V basta dividirmos cada vetor de S por sua norma. Portanto,

$$C = \{t_1, t_2, t_3\} = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal de V gerada de S.

Para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que $v = \langle v, t_1 \rangle t_1 + \langle v, t_2 \rangle t_2 + \langle v, t_3 \rangle t_3$. Assim,

- $\langle v, t_1 \rangle = (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = x,$
- $\langle v, t_1 \rangle = (x, y, z) \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-y + z}{\sqrt{2}},$
- $\langle v, t_1 \rangle = (x, y, z) \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-y - z}{\sqrt{2}},$

e, consequentemente, temos que

$$[v]_C = \left(x, \frac{-y + z}{\sqrt{2}}, \frac{-y - z}{\sqrt{2}}\right).$$

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!