1.7 Relação entre Vetores e Coordenadas

Até agora nos preocupamos apenas com a ideia geométrica envolvendo vetores. O problema que o manuseio geométrico torna o trabalho muito difícil. Por isto, vamos construir um tratamento algébrico, de forma a tornar o trabalho mais "simples".

Para construir essa ideia algébrica, vamos começar estudando os vetores no plano. Para isso, vamos tomar dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos e não-colineares. Assim, para todo vetor $\vec{w}$ é possível encontrar escalares α e β de forma que o vetor $\vec{w}$ seja a combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Uma ilustração desse comentário é apresentado na Figura 1.32.

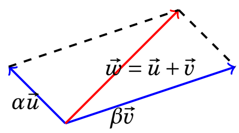

Figura 1.32: Ilustrações de $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Observe que (α,β) são as coordenadas de $\vec{w}$ em relação a base $B = (\vec{u},\vec{v})$. Além disso, qualquer vetor $\vec{w}$ pode ser descrito em relação aos vetores da base B, usando a decomposição de $\vec{w}$ sobre as retas que contém os vetores de B, como ilustrado na Figura 1.32.

Quando se toma uma base B, a ordem em que aparecem os vetores em B é importante para a representação do vetor através se suas coordenadas. Na maioria das vezes, em vez de escrevermos $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, escrevemos simplesmente $\vec{v} = (\alpha,\beta)$ e, por isso, temos um par ordenado. Logo, é importante ficar claro que em B o primeiro vetor é que esta sendo multiplicado por α e o segundo por β, e, consequentemente, $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ é uma base diferente de $\tilde{B} = \{\vec{v},\vec{u}\}$.

Qualquer par de vetores LI $\{\vec{u},\vec{v}\}$ do plano forma uma base para o $\mathbb{R}^2$. Porém, na maioria das vezes, usamos uma base ortonormal, ou seja, uma base onde os vetores sejam ortogonais entre si e que cada um desses sejam unitário. Portanto, sendo $C = \{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ uma base ortonormal, então, temos que

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \text{ e } ||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = 1.$$

Observação 1.7.1 *Existem infinitas bases ortonormais no espaço, porém existe uma que é bem especial. Essa base é chamada de Base Canônica.*

A base canônica é obtida como a seguir: considere um sistema de eixos Oxy do plano cartesiano. Seja $\vec{i}$ um vetor unitário, sobre o eixo das abscissas, de origem O e mesmo sentido de crescimento do eixo, e considere $\vec{j}$ um vetor unitário sobre o eixo das ordenadas, de origem O e mesmo sentido de crescimento do eixo, como visto na Figura 1.33.

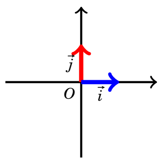

Figura 1.33: Ilustração da Base Canônica $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ do plano.

Como eles são unitários, temos que $\vec{i} = (1,0)$ e que $\vec{j} = (0,1)$. Além disso, seja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Observe que o paralelogramo formado pela soma $x\vec{i} + y\vec{j}$ tem lados paralelos aos eixos, e por isso, temos um retângulo, como visto na Figura1.34.

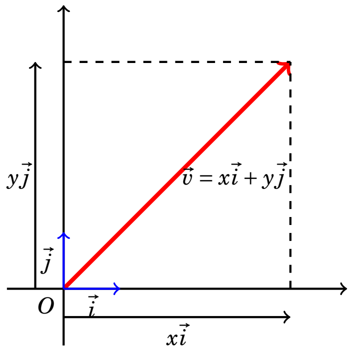

Figura 1.34: Ilustração da Base Canônica $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ do plano.

Daí,

$$\left\|x\vec{i}\right\| = |x| \cdot \left\|\vec{i}\right\| = |x| \text{ e } \left\|y\vec{j}\right\| = |y| \cdot \left\|\vec{j}\right\| = |y|.$$

Portanto, podemos representar o vetor $\vec{v}$ apenas por suas coordenadas, ou seja, em vez de escrevermos $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, escrevemos apenas $\vec{v} = (x,y)$. Assim, todo ponto do plano pode ser visto como sendo um vetor, de origem $O = (0,0)$. A decomposição do vetor $\vec{v}$, sobre os eixos, feita na Figura 1.34 é idêntica a feita na Figura 1.5, da Seção 1.1.

Representar um vetor por suas coordenadas em relação a base canônica é definido como sendo a *Expressão Analítica* do vetor, como apresentado a seguir.

Definição 1.7.1 *Seja $\vec{v}$ um vetor do plano tal que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Assim, a expressão $\vec{v} = (x,y)$ é chamada de Expressão Analítica de $\vec{v}$.*

Observação 1.7.2 *Assim como definido na Seção 1.1, a primeira coordenada de $\vec{v} = (x,y)$ é chamada de Abscissa e a segunda coordenada de Ordenada.*

Exemplo 1.7.1 *Observe que se $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} = (2,-4)$, com $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$. Além disso, $\vec{0} = (0,0)$.*

■

Observação 1.7.3 *A escolha da base canônica é de propósito, para facilitar a transformação dos pontos do plano em vetores, e vice e versa. Por isso, os pontos do plano podem ser vistos como vetores ou pontos, dependendo da situação em estudo. Além disso, da Seção 1.1 e da Seção 1.5 temos que: se* $\vec{u} = (a_1, b_1)$ *e* $\vec{v} = (a_2, b_2)$*, então,*

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = a_2$ *e* $b_1 = b_2$.

b) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

c) $k\vec{u} = (k \cdot a_1, k \cdot b_1)$.

Agora, vamos entender como obtemos um vetor conhecendo os seus pontos iniciais e finais. Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$, cuja origem é o ponto $A = (a_1, b_1)$ e extremidade é o ponto $B = (a_2, b_2)$. Então, os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, cujas expressões analíticas são dadas por $\overrightarrow{OA} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (a_2, b_2)$. Na Figura 1.35 temos uma ilustração da situação descrita.

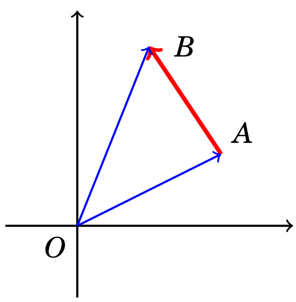

Figura 1.35: Ilustração da Base Canônica $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

Do triângulo OAB, cujos lados são dados pelos vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{AB}$, segue que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (a_2, b_2) - (a_1, b_1) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1).$$

Em outras palavras, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, é dada pelas diferença das coordenadas da extremidade B pelas coordenadas da origem A, confirmando a notação já estabelecida anteriormente, $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Observação 1.7.4 *O vetor* $\overrightarrow{AB} = B - A$*, cuja representação analítica fica dada* $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$*, é um vetor cuja origem coincide com a origem* O *do sistema de eixos, porém, ele apenas foi definido por dois pontos quaisquer.*

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.7.2 *Determine um vetor* $\vec{w}$ *de forma que seja válida a igualdade* $3\vec{w} - 2\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{u} - \vec{w} + 4\vec{v}$*, sendo* $\vec{u} = (-2, 3)$ *e* $\vec{v} = (1, 2)$.

Solução: Temos que

$$3\vec{w}-2\vec{u}+\vec{v}=2\vec{u}-\vec{w}+4\vec{v} \Leftrightarrow 3\vec{w}+\vec{w}=2\vec{u}+2\vec{u}-\vec{v}+4\vec{v} \Leftrightarrow 4\vec{w}=4\vec{u}+3\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$=4\vec{w}=4.(-2,3)+3.(1,2) \Leftrightarrow 4\vec{w}=(-5,18) \Leftrightarrow \vec{w}=\frac{1}{4}(-5,18) \Leftrightarrow \vec{w}=\left(\frac{-5}{4},\frac{9}{2}\right).$$

Portanto, a identidade é válida se $\vec{w}=\left(\frac{-5}{4},\frac{9}{2}\right)$. ■

Exemplo 1.7.3 *Encontre os escalares a e b sabendo que $\vec{w}=2a\vec{u}-\frac{3b}{2}\vec{v}$, onde $\vec{u}=(1,-2)$, $\vec{v}=(-2,3)$ e $\vec{w}=(2,-1)$.*

Solução: Temos que

$$\vec{w}=2a\vec{u}-\frac{3b}{2}\vec{v} \Leftrightarrow 2\vec{w}=4a\vec{u}-3b\vec{v} \Leftrightarrow 2\cdot(2,-1)=4a.(1,-2)-3b.(-2,3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+6b=4 \\ -8a-9b=-2 \end{cases}.$$

Assim, somando 2 vezes a primeira linha do sistema com a segunda linha do sistema chegamos a $3b=6$, ou seja $b=2$. Substituindo na primeira equação o valor de b, chegamos a $4a+12=4 \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$. Portanto, temos que a identidade é válida se $a=-2$ e $b=2$. ■

Exemplo 1.7.4 *Dado os pontos $A=(-1,2)$, $B=(3,-1)$, $C=(-2,4)$, determine $D=(x,y)$ de modo que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$.*

Solução: Como $\overrightarrow{AB}=B-A \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3,-1)-(-1,2)=(4,-3)$ e $\overrightarrow{CD}=D-C \Rightarrow \overrightarrow{CD}=(x,y)-(-2,4)=(x+2,y-4)$. Assim, temos que

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (4,-3)=2(x+2,y-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+4=4 \text{ e } 2y-8=-3 \Leftrightarrow 2x=0 \text{ e } 2y=5.$$

Portanto, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ se $D=\left(0,\frac{5}{2}\right)$. ■

Exemplo 1.7.5 *Determine um ponto $B=(x,y)$, de forma que o vetor $\vec{v}=(-3,4)$ seja dado por $\overrightarrow{AB}$, com $A=(-2,3)$.*

Solução: Temos que $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x,y)-(-2,3)$. Então, temos que $x+2=-3$ e que $y-3=4$, ou seja, $x=-5$ e $y=7$. Portanto, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ se, e somente se, $B=(-5,7)$. ■

Agora, vamos encontrar uma condição para verificar se dois vetores são ou não colineares, usando as suas representações algébricas. Sendo $\vec{u}\parallel\vec{v}$, temos que $\vec{u}$ é um múltiplo do $\vec{v}$ e, assim,

$$\vec{u}\parallel\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=m\vec{v}, \text{ para algum } m\in\mathbb{R}.$$

Daí, supondo que $\vec{u}=(a_1,b_1)$ e que $\vec{v}=(a_2,b_2)$, segue que

$$\vec{u}\parallel\vec{v} \Leftrightarrow a_1=ma_2 \text{ e } b_1=mb_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=m=\frac{b_1}{b_2}.$$

Observação 1.7.5 *Não se esqueça que a condição* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ *só é válida se* $a_2 \neq 0$ *e* $b_2 \neq 0$ *mas, o mais importante, é lembrar que dois vetores no plano são colineares se as suas coordenadas forem proporcionais*

Exemplo 1.7.6 *Encontre o versor do vetor* $\vec{v} = (3,-4)$.

Solução: Temos que o versor de um vetor é o vetor de mesma direção e sentido do vetor dado e de norma um e, por isso, ele pode ser obtido por $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$. Assim, como $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2}$, segue que $||\vec{v}|| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Daí, $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \dfrac{(3,-4)}{5} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}\right)$.

Portanto, o versor $\vec{u}$ de $\vec{v}$ é dado por

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right).$$

■

Exemplo 1.7.7 *Dado os vetores* $\vec{u} = (-1,3)$ *e* $\vec{v} = (-2,-1)$ *e os pontos* $A = (2,-1)$ *e* $B = (-1,4)$ *encontre cada uma das medidas desejadas a seguir:*

a) $||\vec{u}||$;

b) $||\vec{u}+\vec{v}||$;

c) $||2\vec{u}-3\vec{v}||$;

d) A distância entre A e B.

Solução:

a) Temos que $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Portanto,

$$||\vec{u}|| = \sqrt{10}.$$

b) Temos que $\vec{u}+\vec{v} = (-1,3)+(-2,-1) = (-3,2)$. Assim, $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Portanto,

$$||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{13}.$$

c) Temos que $2\vec{u}-3\vec{v} = 2\cdot(-1,3)+(-3)\cdot(-2,-1) = (4,9)$. Assim, $||2\vec{u}-3\vec{v}|| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4^2+9^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$. Portanto,

$$||2\vec{u}-3\vec{v}|| = \sqrt{97}.$$

d) A distância entre dois pontos é igual a medida do vetor formado por esses mesmos pontos e, por isso, $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BA}\right|\right|$. Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,4)-(2,-1) = (-3,5)$, segue que $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$. Portanto, a distância entre A e B é de $\sqrt{34}$ unidades de comprimento.

■

Exemplo 1.7.8 *Determine um ponto P no eixo das abscisas que seja equidistante aos pontos $A = (-1,2)$ e $B = (5,-4)$.*

Solução: Dois pontos A e B são equidistantes a um mesmo ponto P se a distância entre A e P for a mesma entre B e P. Assim,

$$\left|\left|\overrightarrow{AP}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BP}\right|\right| \Leftrightarrow \left|\left|\overrightarrow{AP}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BP}\right|\right|.$$

Como o ponto P está sobre o eixo das abscisas, temos que ele é da forma $P = (x,0)$. Assim, $\overrightarrow{AP} = (x,0)-(-1,2) = (x+1,-2)$ e $\overrightarrow{BP} = (x,0)-(5,-4) = (x-5,4)$. Consequentemente, segue que

$$\left|\left|\overrightarrow{AP}\right|\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+(-2)^2} = \sqrt{x^2+2x+1+4} = \sqrt{x^2+2x+5} \text{ e}$$

$$\left|\left|\overrightarrow{BP}\right|\right| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-5)^2+(4)^2} = \sqrt{x^2-10x+25+16} = \sqrt{x^2-10x+41}.$$

Daí,

$$\left|\left|\overrightarrow{AP}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BP}\right|\right| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{x^2-10x+41} \Leftrightarrow x^2+2x+5 = x^2-10x+41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+10x = 41-5 \Leftrightarrow 12x = 36 \Leftrightarrow x = 3.$$

Portanto, A e B são equidistantes do ponto $P = (3,0)$. ■

Exemplo 1.7.9 *Dados um vetor $\vec{v} = (-2,1)$, ache um vetor $\vec{u}$ com cada uma das seguintes propriedades:*

a) $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tenham mesmo sentido e $||\vec{u}|| = 3\,||\vec{v}||$;

b) $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tenham sentidos contrários e $2\,||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$;

c) $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tenham mesmo sentido e $||\vec{u}|| = 4$;

d) $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tenham sentidos contrários e $||\vec{u}|| = 2$.

Solução:

a) Como o vetor $\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$ e como $||\vec{u}|| = 3\,||\vec{v}||$, segue que o vetor $\vec{u}$ é obtido pelo produto do vetor $\vec{v}$ por $3 > 0$, ou seja, $\vec{u} = 3\vec{v} = 3(-2,1) = (-6,3)$. Portanto,

$$\vec{u} = (-6,3).$$

b) Como o vetor $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem sentidos opostos e como $2\,||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$, segue que o vetor $\vec{u}$ é obtido pelo produto do vetor $\vec{v}$ por $-\frac{1}{2}$, ou seja, $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}\cdot(-2,1) = \left(1,-\frac{1}{2}\right)$. Portanto,

$$\vec{u} = \left(1,-\frac{1}{2}\right).$$

c) Como o vetor $\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{v}$ e como $||\vec{u}|| = 4$, segue que o vetor $\vec{u}$ é dado pelo produto do versor do vetor $\vec{v}$ por 4, visto que o módulo do versor de $\vec{v}$ é 1. Assim, se $\vec{w}$ é o versor do vetor $\vec{v}$, segue que

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{(-2,1)}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Daí, segue que $\vec{u} = 4\vec{w} = 4 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. Portanto,

$$\vec{u} = \left(\frac{-8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

d) Da mesma forma que no item anterior, como o vetor $\vec{u}$ tem sentido contrário do vetor $\vec{v}$ e como $||\vec{u}|| = 2$, segue que o vetor $\vec{u}$ fica dado pelo produto do versor do vetor $\vec{v}$ por -2. Assim, segue que $\vec{u} = -2\vec{w} = -2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Portanto,

$$\vec{u} = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

■

Agora vamos estender a ideia para vetores no espaço, ou seja, vamos generalizar o estudo do plano para o espaço. Para isso, considere um sistema de eixos ortogonais $Oxyz$ do espaço. Usando a mesma ideia construída para o plano, vamos considerar a base $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ como sendo a base canônica do novo sistema $Oxyz$.

Lembremos que o vetor $\vec{i}$ está sobre o semieixo positivo das abscissas e tem origem O. Assim, como o seu comprimento é 1, segue que $\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (1,0,0)$. Analogamente, temos que $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$. Na Figura 1.36 é ilustrado uma representação para a base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ no espaço.

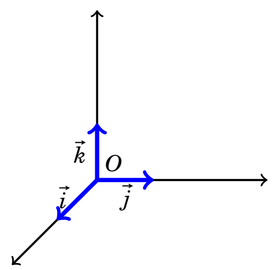

Figura 1.36: Ilustração da Base Canônica $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ do espaço.

Com isso, todo ponto do espaço pode ser visto como sendo um vetor, e todo vetor pode ser visto como sendo um ponto do espaço. Além disso, da mesma forma que no plano, um vetor dado por $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ tem como coordenadas a tripla ordenada (x, y, z), sendo que a primeira coordenada é chamada de abscissa, a segunda é chamada de ordenada e a terceira é chamada de cota. Na Figura 1.37 temos a representação de um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ no espaço.

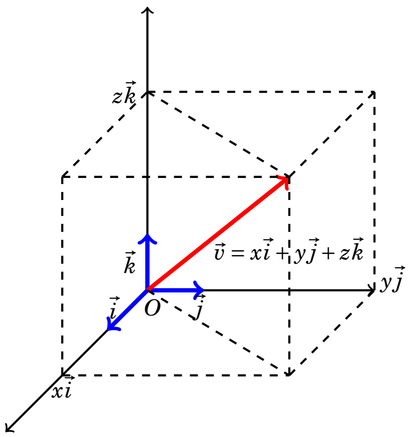

Figura 1.37: Ilustração de um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ do espaço.

Observação 1.7.6 *O plano é um caso particular do espaço, ou seja, o caso quando a cota vale zero, para todo ponto. Nessa situação, temos uma projeção dos pontos do espaço no plano. Por isso, todos os pontos do espaço podem ser projetados sobre qualquer um dos planos XY (tomando $z = 0$), XZ (tomando $y = 0$) e YZ (tomando $x = 0$).*

Além disso, da mesma forma que para vetores nos espaço, temos que: sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores no espaço e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$ *e* $c_1 = c_2$;

b) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$;

c) $k\vec{u} = (ka_1, kb_1, kc_1)$;

d) Dado dois pontos quaisquer do espaço $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então, o vetor $\overrightarrow{AB}$ e dado por $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

e) Temos que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ é equivalente a $\vec{u} = m\vec{v}$, para algum $m \in \mathbb{R}$, que é equivalente a $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = m$.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.7.10 *Dados os pontos $A = (0,1,-1)$ e $B = (1,2,-1)$ e os vetores $\vec{u} = (-2,-1,1)$, $\vec{v} = (3,0,-1)$ e $\vec{w} = (-2,2,2)$, encontre $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que $\vec{w} = a\overrightarrow{AB} + b\vec{u} + c\vec{v}$.*

Solução: Temos que $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,-1) - (0,1,-1) = (1,1,0)$. Daí,

$$\vec{w} = a\overrightarrow{AB} + b\vec{u} + c\vec{v} \Leftrightarrow (-2,2,2) = a(1,1,0) + b(-2,-1,1) + c(3,0,-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 3c & = & -2 \\ a - b & = & 2 \\ b - c & = & 2 \end{cases}.$$

Então, isolando a na segunda linha chegamos a $a = 2+b$. Isolando c na terceira linha chegamos a $c = b-2$. Então, substituindo o valor de a e c na primeira equação chegamos a

$$(2+b)-2b+3(b-2) = -2 \Leftrightarrow 2+b-2b+3b-6 = -2 \Leftrightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1.$$

Assim, $a = 3$, $b = 1$ e $c = -1$. Portanto, os valores de a, b e c que tornam a identidade $\vec{w} = a\overrightarrow{AB} + b\vec{u} + c\vec{v}$ verdadeira são 3, 1 e -1, respectivamente. ■

Exemplo 1.7.11 *Dados os pontos $P = (1,2,4)$, $Q = (2,3,2)$ e $R = (2,1,-1)$, encontre o ponto S de forma que os pontos $PQRS$ forme, nessa ordem, um paralelogramo.*

Solução: Na Figura 1.38 é ilustrado as duas possíveis disposição dos pontos $PQRS$ de forma que se formem um paralelogramo com os pontos na ordem desejada.

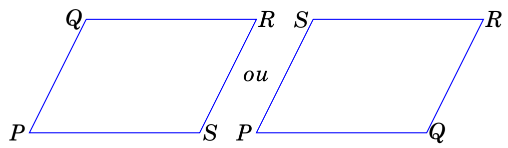

Figura 1.38: Ilustração das possibilidades de $PQRS$ formar um paralelogramo nessa ordem.

Tome $S = (x,y,z)$. Observe que nos dois casos, para que os pontos formem um paralelogramo é necessário que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ e que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. Então, como $\overrightarrow{PQ} = Q-P = (1,1,-2)$ e $\overrightarrow{SR} = R-S = (2-x, 1-y, -1-z)$, segue que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Leftrightarrow (2-x, 1-y, -1-z) = (1,1,-2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} 2-x & = & 1 \\ 1-y & = & 1 \\ -1-z & = & -2 \end{array} \right. .$$

Portanto, a solução do sistema é dada para $x = 1$, $y = 0$ e $z = 1$, ou seja, o ponto S é dado por $S = (1,0,1)$. ■

Exemplo 1.7.12 *Dados os pontos $P = (1,2,4)$, $Q = (2,3,2)$ e $R = (2,1,-1)$, encontre o ponto S de forma que os pontos $PQRS$ forme um paralelogramo.*

Solução: Nesse caso, temos que existem três possibilidades diferentes para a disposição do ponto S, como visto na Figura 1.39.

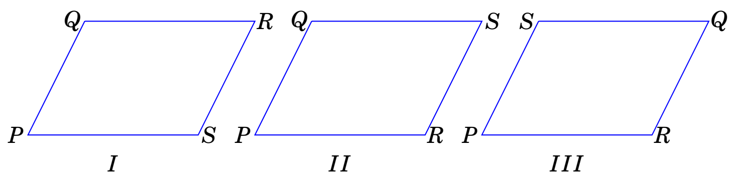

Figura 1.39: Ilustração das possibilidades de $PQRS$ formar um paralelogramo.

Observe que, o caso I foi resolvido no Exemplo 1.7.11, e por isso, $S = (1,0,1)$. Para o caso II, temos que $\overrightarrow{PR} = R - P = (1,-1,-5)$ e $\overrightarrow{QS} = Q - S = (2-x, 3-y, 2-z)$ e, por isso, temos que

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS} \Leftrightarrow (2-x, 3-y, 2-z) = (1,-1,-5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x &= 1 \\ 3-y &= -1 \\ 2-z &= -5 \end{cases}.$$

Portanto, a solução do sistema, para a situação II é dada por $S = (1,4,7)$. Por fim, para a situação III, segue que $\overrightarrow{PR} = R - P = (1,-1,-5)$ e $\overrightarrow{SQ} = Q - S = (x-2, y-3, z-2)$, consequentemente,

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS} \Leftrightarrow (x-2, y-3, z-2) = (1,-1,-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 &= 1 \\ y-3 &= -1 \\ z-2 &= -5 \end{cases}.$$

Daí, a solução do sistema, para a situação III é dada por $S = (3,2,-3)$. Portanto, os possíveis valores de S, de forma que os pontos $PQRS$ formem paralelogramo, são

$$S = (1,0,1),\ S = (1,4,7) \text{ ou } S = (3,2,-3).$$

■

Exemplo 1.7.13 *Determine os valores de m e n para que os vetores $\vec{v} = (m+1, 3, 1)$ e $\vec{w} = (4,2,2n-1)$ sejam colineares.*

Solução: Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, segue que um é múltiplo escalar do outro e, por isso, temos que o quociente entre as suas coordenadas correspondentes é constante, ou seja,

$$\frac{m+1}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2n-1}.$$

Da primeira igualdade temos que $\frac{m+1}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(m+1) = 3.4 \Leftrightarrow 2m = 10 \Leftrightarrow m = 5$. Usando a segunda igualdade, chegamos a $\frac{1}{2n-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3(2n-1) = 2.1 \Leftrightarrow 6n = 5 \Leftrightarrow n = \frac{5}{6}$. Portanto, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares se $m = 5$ e $n = \frac{5}{6}$. ■

Exemplo 1.7.14 *Dados os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, encontre uma equação para o ponto médio que está no segmento de reta ligando os pontos A e B.*

Solução: Temos que $\left\|\overline{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Assim, como queremos o ponto médio de $\overline{AB}$, segue que buscamo um ponto M de forma que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Para isso, seja $M = (x,y,z)$, então, temos que $\overrightarrow{AM} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ e que $\overrightarrow{BM} = (x-x_2, y-y_2, z-z_2)$. Daí, segue que

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Rightarrow (x-x_1, y-y_1, z-z_1) + (x-x_2, y-y_2, z-z_2) = (0,0,0).$$

Logo,

$$\begin{cases} x - x_1 + x - x_2 = 0 \\ y - y_1 + y - y_2 = 0 \\ z - z_1 + z - z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x_1 + x_2 \\ 2y = y_1 + y_2 \\ 2z = z_1 + z_2 \end{cases}.$$

Portanto, o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é dado por

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

■

Exemplo 1.7.15 *Seja o triângulo ABC, de vértices dado pelos pontos $A = (4,-1,-2)$, $B = (2,5,-6)$ e $C = (1,-1,-2)$. Encontre a medida da mediana do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AB}$.*

Solução: Tome um Triângulo ABC, como na Figura 1.40 e seja M o ponto médio de $\overline{AB}$.

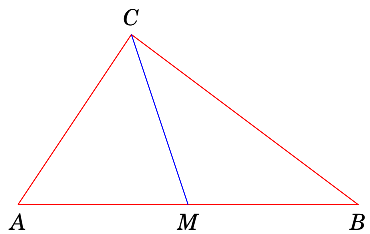

Figura 1.40: Ilustração das possibilidades de $PQRS$ formar um paralelogramo nessa ordem.

Como desejamos obter a medida da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$, segue que queremos a medida do segmento $\overline{CM}$. Daí, como M é o ponto médio de $\overline{AB}$, segue do Exemplo 1.7.14 que sendo $A = (x_1, y_1, z_1) = (4,-1,-2)$ e $B = (x_2, y_2, z_2) = (2,5,-6)$, então,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right) = (3,2,-4).$$

Daí, $\overrightarrow{CM} = M - C = (3,2,-4) - (1,-1,-2) = (2,3,-2)$. Logo, a medida da mediana $\overline{CM}$ fica dada por

$$\left\|\overline{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{CM}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}.$$

Portanto, a medida da mediana do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AB}$ é de $\sqrt{17}$ unidades de comprimento. ■

Agora, faça alguns exercícios para fixar os conceitos estudados. Bons estudos...

1.8 Exercícios

Exercício 1.8.1 *Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determine:*

a) $2\vec{u}-\vec{v}$;

b) $\vec{v}-\vec{u}+2\vec{w}$;

c) $\frac{1}{2}\vec{u}-2\vec{v}-\vec{w}$;

d) $3\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$;

e) $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}-\frac{2}{5}\vec{w}$;

f) $\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{5}\vec{w}$.

Exercício 1.8.2 *Dados os vetores* $\vec{u}=(3,-1)$ *e* $\vec{v}=(-1,2)$*, determine o vetor* $\vec{w}$ *que satisfaça cada um dos itens a seguir.*

a) $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$;

b) $3\vec{w}-(2\vec{v}-\vec{u})=2(4\vec{w}-3\vec{u})$;

c) $2(\vec{w}-3\vec{v})+\frac{2}{5}\vec{u}=\vec{u}-\frac{2}{3}\vec{v}$;

d) $\frac{2}{3}\vec{u}-3\vec{w}-\frac{1}{5}\vec{v}=\vec{w}+\frac{2}{7}\vec{v}$.

Exercício 1.8.3 *Dados os vetores* $\vec{u}=(2,-4)$*,* $\vec{v}=(-5,1)$ *e* $\vec{w}=(-12,6)$*, determine as constantes* m *e* n *de forma que seja válida cada identidade a seguir:*

a) $\vec{w}=m\vec{u}+n\vec{v}$;

b) $2\vec{v}=3m\vec{u}-5n\vec{w}$;

c) $3\vec{u}=-2m\vec{v}+n\vec{w}$.

Exercício 1.8.4 *Dado os pontos* $A=(3,-4)$ *e* $B=(-1,1)$ *e o vetor* $\vec{v}=(-2,3)$*, encontre:*

a) $(B-A)+2\vec{v}$;

b) $(A-B)-\vec{v}$;

c) $B+2(B-A)$;

d) $3\vec{v}-2(A-B)$.

Exercício 1.8.5 *Encontre cada um dos vetores* $\overrightarrow{AB}$ *dados pelos pontos abaixo e represente graficamente o seu vetor posição (com origem no ponto* $(0,0)$*.)*

a) $A=(-1,3)$ *e* $B=(3,5)$;

b) $A=(-1,4)$ *e* $B=(4,1)$;

c) $A=(4,0)$ *e* $B=(0,-2)$;

d) $A=(3,1)$ *e* $B=(3,4)$;

e) $A=(-3,-1)$ *e* $B=(3,-4)$;

f) $A=(2,-2)$ *e* $B=(5,-1)$.

Exercício 1.8.6 *Qual o ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor* $\vec{v}=(-1,3)$*, sabendo que a origem deste segmento é o ponto* $(3,1)$*? Represente graficamente este segmento e o vetor* $\vec{v}$*.*

Exercício 1.8.7 *Sabendo que* $A=(1,-1)$*,* $B=(5,1)$ *e* $C=(6,4)$ *são vértices de um paralelogramo, determine o quarto vértice dos três possíveis paralelogramos possíveis a serem formados.*

Exercício 1.8.8 *Sabendo que* $A=(-3,-1)$ *e* $B=(6,-3)$ *são extremos de um intervalo, determine os pontos* C*,* D *e* E *que dividem o segmento* $\overrightarrow{AB}$ *em quatro segmentos de mesma medida.*

Exercício 1.8.9 *Determine o valor de* a *de forma que a norma do vetor* $\vec{v}=(a,-2)$ *tenha módulo* 4*.*

Exercício 1.8.10 *Prove que os pontos* $A=(-2,-1)$*,* $B=(2,2)$*,* $C=(-1,6)$ *e* $D=(-5,3)$*, nessa ordem, são vértice de um quadrado.*

Exercício 1.8.11 *Encontre o versor de cada um dos vetores a seguir.*

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$;

b) $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$;

c) $\vec{v} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$;

d) $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$;

e) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$;

f) $\vec{v} = 4\vec{j}$;

g) $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

h) $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;

i) $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$;

j) $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$;

k) $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$;

l) $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Exercício 1.8.12 *Dado um vetor* $\vec{v} = (1, -3)$, *determine um vetor* $\vec{u}$, *sendo* $\vec{u} \perp \vec{v}$ *de forma que:*

a) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *tenham sentidos opostos e que* $||\vec{u}|| = 2\,||\vec{v}||$;

b) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *tenham o mesmo sentido e que* $2\,||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$;

c) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *tenham sentidos contrários e que* $||\vec{u}|| = 3$;

d) $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *tenham o mesmo sentido e que* $||\vec{u}|| = 5$.

Exercício 1.8.13 *Construa o paralelepípedo retângulo formado pelos pontos* x, y, z *de modo que* $1 \le x \le 3$, $3 \le y \le 5$ *e* $0 \le z \le 4$. *Quais as coordenadas dos oito vértices do paralelepípedo?*

Exercício 1.8.14 *Calcule a distância do ponto* $A = (3, 4, -2)$

a) *ao plano* XY;

b) *ao plano* XZ;

c) *ao plano* YZ;

d) *ao eixo* X;

e) *ao eixo* Y;

f) *ao eixo* Z.

Exercício 1.8.15 *Um paralelepípedo retângulo de dimensões* $3, 4, 5$ *está sobre o sistema* $Oxyz$, *como apresentado na Figura 1.41.*

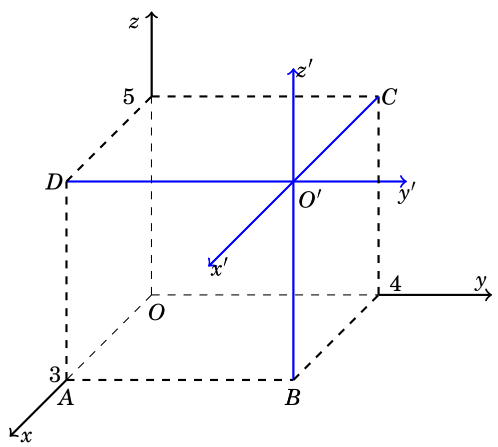

Figura 1.41: Ilustração do paralelepípedo utilizado no Exercício 1.8.15.

Considere um sistema $O'x'y'z'$, *sendo* $Ox \perp O'x'$, $Oy \perp O'y'$ *e* $Oz \perp O'z'$; *e sendo* O' *um dos vértices do paralelepípedo, de acordo com a Figura 1.41. Determine as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e* O' *em relação a cada um dos sistemas de eixos dados.*

Exercício 1.8.16 *Dados os pontos* $A = (-1,2,3)$ *e* $B = (-4,5,-2)$*, determine um ponto* P *de forma que* $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

Exercício 1.8.17 *Determine um vetor* $\vec{v}$ *de forma que* $(3,7,1)+2\vec{v} = (6,10,4)-\vec{v}$.

Exercício 1.8.18 *Verifique se os pontos abaixo são colineares.*

a) $A = (-1,-5,0)$*,* $B = (2,1,3)$ *e* $C = (-2,-7,-1)$*;*

b) $A = (2,1,-1)$*,* $B = (3,-1,0)$ *e* $C = (1,0,4)$*;*

c) $A = (1,-1,2)$*,* $B = (-3,4,1)$ *e* $C = (1,0,9)$*;*

d) $A = (7,6,1)$*,* $B = (2,1,0)$ *e* $C = (1,-2,1)$*;*

e) $A = (1,-5,2)$*,* $B = (-2,10,-4)$ *e* $C = (5,25,10)$.

Exercício 1.8.19 *Dados os pontos* $A = (2,-2,3)$ *e* $B = (1,1,5)$ *e o vetor* $\vec{v} = (1,3,-4)$*, calcule:*

a) $A+3\vec{v}$*;* *b)* $(A-B)-\vec{v}$*;* *c)* $B+2(B-A)$*;* *d)* $2\vec{v}-3(B-A)$.

Exercício 1.8.20 *Dados os pontos* $A = (1,-2,3)$*,* $B = (2,1,-4)$ *e* $C = (-1,-3,1)$*, determine um ponto* D *de forma que* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$.

Exercício 1.8.21 *A reta que passa por* $A = (-2,5,1)$ *e* $B = (1,3,0)$ *é paralela a reta que passa por* $C = (3,-1,-1)$ *e* $D = (0,m,n)$*. Encontre o ponto* D.

Exercício 1.8.22 *Obtenha um ponto* P*, no eixo das abscissas, que seja equidistante aos pontos* $A = (3,-1,4)$ *e* $B = (1,-2,-3)$.

Exercício 1.8.23 *Obtenha um ponto* P*, no eixo das ordenadas, que seja equidistante aos pontos* $A = (4,2,1)$ *e* $B = (-2,3,-3)$.

Exercício 1.8.24 *Dados o vetor* $\vec{v} = (2,-1,-3)$*, determine um vetor* $\vec{u}$ *de forma que*

a) tenha o sentido contrário do vetor $\vec{v}$ *e tenha o triplo do comprimento de* $\vec{v}$*;*

b) tenha o mesmo sentido de $\vec{v}$ *e tenha módulo* 4*;*

c) tenha sentido contrário ao de $\vec{v}$ *e módulo* 5.

Exercício 1.8.25 *Sendo* $A = (2,-5,3)$ *e* $B = (7,3,-1)$ *vértices consecutivos de um paralelogramo* $ABCD$ *e sendo* $M = (4,-3,3)$ *o ponto de intersecção das diagonais, determine os vértices* C *e* D.

Exercício 1.8.26 *Encontre o ponto simétrico ao ponto* $P = (3,1,-2)$ *em relação ao ponto* $A = (-1,0,-3)$.

Exercício 1.8.27 *Dado o vetor* $\vec{w} = (3,2,5)$*, determine* a *e* b *de forma que os vetores* $\vec{u} = (3,2,-1)$ *e* $\vec{v} = (a,6,b)+2\vec{w}$ *sejam colineares.*

Exercício 1.8.28 *Represente algebricamente um vetor genérico que seja:*

a) paralelo ao eixo x;

b) paralelo ao plano XY;

c) paralelo ao plano YZ;

d) ortogonal ao eixo y;

e) ortogonal ao eixo z;

f) ortogonal ao plano XY;

g) ortogonal ao plano XZ.

Exercício 1.8.29 *Dados o vetor $\vec{v} = (-1, 2, -5)$, determine um vetor $\vec{u}$ de forma que:*

a) tenha o sentido contrário do vetor $\vec{v}$ e tenha a metade do módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e tenha módulo $\frac{2}{3}$;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo $\sqrt{5}$;

d) tenha o mesmo sentido de $\vec{v}$, mas que seu módulo seja 4 vezes maior do que o módulo de $\vec{v}$.