2.5 Integral Dupla em Coordenadas Polares

O modo de se representar um ponto no plano pelos valores de x e y é denominado *Coordenadas Cartesianas Retangulares*. Existem outros sistemas de coordenadas, que dão a posição de um ponto num plano. Um desses sistemas é chamado de *Coordenadas Polares*. Esse sistema é muito importante, ja que ele transforma algumas equações em expressões mais simples, quando apresentadas nesse sistema.

No sistema cartesiano as coordenadas são números chamados de abscissa e ordenada, que são as medidas das distâncias orientadas a dois eixos fixos. No sistema polar, as coordenadas consistem numa distância orientada e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um semi-eixo fixo. O ponto fixo é chamado de *Polo* (ou *Origem*), sendo designado pela letra O. O semi-eixo OA geralmente é colocado na horizontal, orientado para a direita e se estendendo até o infinito.

Seja P um ponto qualquer do plano tal que $P \neq O$. Seja θ a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{AOP}$ orientado positivamente no sentido anti-horário, tendo como lado inicial OA e como lado final OP. Então, se r é a distância não orientada de O a P (isto é, $r = |\overline{OP}|$), o conjunto de coordenadas polares de P é dado por r e θ, e escrevemos essas coordenadas como (r, θ). Temos que $r > 0$ ou $r < 0$. Se acontecer o segundo caso, então P está localizado do lado oposto na extensão do lado terminal do ângulo $\widehat{AOP}$.

Geralmente, desejamos referirmos às coordenadas de um ponto nos dois sistemas de coordenadas: as cartesianas retangulares e as polares. Para isto, tomamos a origem dos sistemas coincidindo e o eixo polar como sendo o semi eixo positivo x. Assim, suponha que (x, y) seja a representação de um ponto P nas coordenadas retangulares e seja (r, θ) a representação de P nas coordenadas polares. Observe o que acontece no primeiro quadrante. As Figuras 2.6 e 2.7 apresentam uma ilustração para $r > 0$ e $r < 0$, respectivamente. Para $r > 0$ temos que:

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} \;\; e \;\; sen(\theta) = \frac{y}{r}$$

e para $r < 0$ temos que:

$$cos(\theta) = \frac{-x}{-r} \;\; e \;\; sen(\theta) = \frac{-y}{-r}.$$

Portanto, para todos os casos temos que

$$x = rcos(\theta) \;\; e \;\; y = rsen(\theta). \tag{2.9}$$

Elevando as duas equações de 2.9 ao quadrado e as somando, temos que

$$x^2 + y^2 = [rcos(\theta)]^2 + [rsen(\theta)]^2 = r^2[cos(\theta)^2 + sen(\theta)^2] = r^2.$$

Portanto,

$$r = \pm\sqrt{x^2 + r^2}.$$

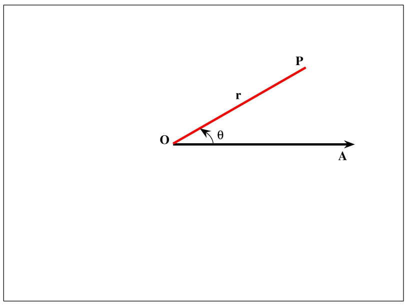

Figura 2.6: Representação em coordenadas polares com $r > 0$.

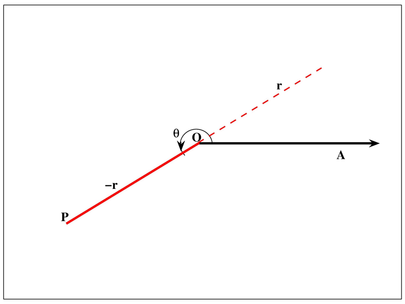

Figura 2.7: Representação em coordenadas polares com $r < 0$.

Agora será mostrado como a integral dupla de uma função sobre uma região fechada pode ser definida em coordenadas polares. Tome, inicialmente, a região mais simples, isto é, seja R a região limitada pelos raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, com $\alpha < \beta$, e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$. Então, seja Δ uma partição desta região obtida ao ser traçados raios pela origem e circunferências de com centro na origem. Assim, será obtido uma malha de sub-regiões que serão chamados de retângulos "curvos". A norma $||\Delta||$ da partição é o comprimento da maior dentre todas as diagonais dos retângulos curvos. Seja n o número de sub-regiões e $\Delta_i A$ a medida da área do i-ésimo retângulo curvo. Como a área da i-ésima sub-região é á diferença entre as áreas de dois setores circulares, então,

$$\Delta_i A = \frac{r_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{r_{i-1}^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Seja $\bar{r} = \dfrac{r_i + r_{i-1}}{2}$, $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$ e $\Delta_i \theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Então,

$$\Delta_i A = \bar{r}\Delta_i r \Delta_i \theta.$$

Tomando o ponto $(\bar{r}\bar{\theta})$ na i-ésima sub-região, onde $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta} \leq \theta_i$ e forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}\bar{\theta})\Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}\bar{\theta})\bar{r}\Delta_i r \Delta_i \theta.$$

Quando f é contínua na região R é possível mostrar que o limite dessa soma, quando a norma da partição tende a zero, existe e ele é igual a integral dupla de f em R. Pode ser escrito, então,

$$\int\int_R f(r,\theta)dA = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}\bar{\theta})\Delta_i A =$$

$$= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}\bar{\theta})\bar{r}\Delta_i r \Delta_i \theta = \int\int_R r f(r,\theta)drd\theta.$$

Observe que em coordenadas polares, $da = rdrd\theta$. Também é possível mostrar que a integral dupla é igual a uma integral iterada, tendo uma destas duas formas:

$$\int\int_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b r f(r,\theta)drd\theta = \int_a^b \int_\alpha^\beta r f(r,\theta)d\theta dr.$$

É possível definir a integral dupla de uma função contínua f de duas variáveis em regiões fechadas de coordenadas polares planas de uma maneira diferente da que já foi feita. Por exemplo, considere a região R limitada pelas curvas $r = \phi_1(\theta)$ e $r = \phi_2(\theta)$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são funções suaves, e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e com $\phi_1 \leq \phi_2$, $\forall\theta \in [\alpha, \beta]$. Então, é possível mostrar que a integral dupla de f em R existe e é igual a uma integral iterada e que

$$\int\int_R f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} rf(r,\theta)drd\theta.$$

Se a região R é limitada pelas curvas $\theta = \xi_1(r)$ e $\theta = \xi_2(r)$, onde ξ_1 e ξ_2 são funções suaves, e pelas circunferências $r = a$ e $r = b$ e com $\xi_1 \leq \xi_2$, $\forall r \in [a, b]$. Então é possível mostrar que a integral dupla de f em R existe e é igual a uma integral iterada e que:

$$\int\int_R f(r,\theta)dA = \int_a^b \int_{\xi_1(r)}^{\xi_2(r)} rf(r,\theta)d\theta dr.$$

Também é possível interpretar a integral dupla de uma função em uma região fechada no plano coordenado polar como a medida do volume de um sólido, usando coordenadas cilíndricas. Tome uma partição de R dando uma malha de r retângulos "'curvos". Construa os n sólidos para os quais o i-ésimo deles tem por base o i-ésimo retângulo curvo e como medida sua altura $f(\bar{r}\bar{\theta})$, onde $(\bar{r}\bar{\theta})$ está na i-ésima sub-região. A medida do volume do i-ésimo sólido é:

$$f(\bar{r}\bar{\theta})\Delta_i A = f(\bar{r}\bar{\theta})\bar{r}\Delta_i r\Delta_i\theta.$$

A soma das medidas dos volumes dos n sólidos é:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}\bar{\theta})\bar{r}\Delta_i r\Delta_i\theta.$$

Se V é a medida do volume do sólido dado, então:

$$V = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}\bar{\theta})\bar{r}\Delta_i r\Delta_i\theta = \int\int_R rf(r,\theta)drd\theta.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.5.1 *Ache o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cone $z = r$ e pelo cilindro $r = 3sen(\theta)$.*

Solução: Usando coordenadas polares, temos que $f(r,\theta) = r$. Se V unidades de volume é o volume do sólido, então:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3sen(\theta)} rf(r,\theta)r^2drd\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3(\theta) = 6.$$

Logo, o volume do sólido é igual a 6 unidades de volume. ■

Exemplo 2.5.2 *Ache por integração dupla a área da região compreendida por uma folha da rosácea $r = sen(3\theta)$.*

Solução: Se A unidades é a área da região, então:

$$A = \int\int_R r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{sen(3\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(3\theta) = \frac{\theta}{4} - \frac{sen(6\pi)}{24}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

Portanto, a área da região é igual a $\frac{\pi}{12}$ unidades de área. ■

Exemplo 2.5.3 *Calcule a integral dupla*

$$\int\int_R e^{-(x^2+y^2)} dA,$$

onde a região R está no primeiro quadrante limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ e pelos eixos coordenados.

Solução: Como $x^2 + y^2 = r^2$, temos que:

$$\int\int_R e^{-(x^2+y^2)} dA = \int\int_R e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r e^{-r^2} dr d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-a^2} - 1) d\theta = \frac{\pi(e^{-a^2} - 1)}{4}.$$

Portanto, o valor da integral é $\dfrac{\pi(e^{-a^2} - 1)}{4}$. ■

A integral dupla pode ser usada para determinar a área de uma superfície $z = f(x, y)$ que está acima de uma região fechada R, no plano XY. Para isso, primeiro existe a necessidade de se entender o que representa a medida dessa área, para que depois seja possível obter uma formula para calculá-la. Suponha que f e suas derivadas parciais sejam contínuas em R e suponha que $f(x, y) \geq 0$ em R. Seja Δ uma partição de R em n subdivisões retangulares. O i-ésimo retângulo tem dimensões com medidas $\Delta_i x$ e $\Delta_i y$ e uma área de medida $\Delta_i A$. Seja (ξ_i, γ_i) um ponto qualquer no i-ésimo retângulo, e no ponto $Q(\xi_i, \gamma_i, f(\xi_i, \gamma_i))$ da superfície considere o plano tangente à superfície. Projeta verticalmente para cima o i-ésimo retângulo sobre o plano tangente, e seja $\Delta_i\sigma$ a medida da área desta projeção. O número $\Delta_i\sigma$ é uma aproximação da medida da área da parte da superfície que está acima do i-ésimo retângulo. Como existem n destas tais partes, a somatória

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma$$

é uma aproximação da medida σ da parte da superfície que está sobre R. Isto leva a definir σ da seguinte forma:

$$\sigma = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\sigma. \tag{2.10}$$

Agora é preciso obter uma formula para calcular o limite na expressão 2.10. Para isto, ache uma formula para obter $\Delta_i\sigma$ como sendo a medida da área de um paralelogramo. Para simplificar os cálculos tome o ponto (ξ_i, γ_i) no i-ésimo retângulo sendo o vértice (x_{i-1}, y_{i-1}). Sejam A e B vetores tendo como representações os segmentos de reta orientados, com pontos iniciais em Q e formando os dois lados adjacentes do paralelogramo, cuja área tem medida $\Delta_i\sigma$. Então,

$$\Delta_i\sigma = ||AxB||.$$

Como $A = \Delta_i x\vec{i} + f_x(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i x\vec{k}$ e $B = \Delta_i y\vec{j} + f_y(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i y\vec{k}$, segue que:

$$AxB = -(\Delta_i x\Delta_i y f_x(\xi_i, \gamma_i))\vec{i} - (\Delta_i x\Delta_i y f_y(\xi_i, \gamma_i))\vec{j} - (\Delta_i x\Delta_i y f_y)\vec{k}.$$

Portanto,

$$\Delta_i\sigma = ||AxB|| = \sqrt{f_x(\xi_i, \gamma_i)^2 + f_y(\xi_i, \gamma_i)^2 + 1}\Delta_i x\Delta_i y.$$

Substituindo na Equação 2.10, obtemos:

$$\sigma = \lim_{||\Delta||\to 0} \sqrt{f_x(\xi_i, \gamma_i)^2 + f_y(\xi_i, \gamma_i)^2 + 1}\Delta_i x\Delta_i y.$$

Esse limite é uma integral dupla que existe em R, em virtude da continuidade de f_x e f_y em R.

Teorema 2.5.1 *Suponha que f e suas derivadas parciais existam e sejam contínuas na região fechada R, no plano XY. Então, se σ é a medida da área da superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R, então:*

$$\sigma = \int\int_R \sqrt{f_x(\xi_i, \gamma_i)^2 + f_y(\xi_i, \gamma_i)^2 + 1}dxdy.$$

Demonstração: Segue dos comentários feito acima. ■

Agora, os exemplos.

Exemplo 2.5.4 *Ache a área da superfície que é cortada do cilindro $x^2+z^2 = 16$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 3$.*

Solução: A região R é o retângulo no primeiro quadrante do plano XY, limitado pelas retas $x = 2$ e $y = 3$. A superfície tem por equação $x^2+z^2 = 16$. Logo, $z = \sqrt{16 - x^2}$. Assim, tomando σ como sendo a medida da área da superfície, então:

$$\sigma = \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{f_x(\xi_i, \gamma_i)^2 + f_y(\xi_i, \gamma_i)^2 + 1}dxdy = \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1}dxdy =$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}dxdy = 4\int_0^3 \left[arcsen(\frac{x}{4})\right]\Big|_0^2 dy = 4\int_0^3 \frac{\pi}{6}dy = 2\pi.$$

Portanto, a área da superfície é 2π unidades de área. ■

Exemplo 2.5.5 *Ache a área do paraboloide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 4$.*

Solução: Da equação do paraboloide temos que $f(x, y) = x^2 + y^2$. A região fechada do plano XY, limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4$ é a região R. Se σ é a área da superfície em questão, então:

$$\sigma = \int\int_R \sqrt{f_x(\xi_i, \gamma_i)^2 + f_y(\xi_i, \gamma_i)^2 + 1}dxdy = \int\int_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}.$$

Passando para coordenadas polares, temos que:

$$\sigma = \sqrt{4r^2 + 1}rdrd\theta.$$

Assim,

$$\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{4r^2 + 1}drd\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{\sqrt{(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}}{12}\right|_0^2 d\theta = \frac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{6}.$$

Portanto, a área do paraboloide abaixo da plano $z = 4$ é $\frac{\pi(17\sqrt{17}-1)}{6}$. ■

Agora, faça alguns exercícios para treinar. Bons estudos.

2.6 Exercícios

Exercício 2.6.1 *Calcule, usando integrais duplas, a área do cardioide $r = 2(1 + sen(\theta))$.*

Exercício 2.6.2 *Determine o volume do sólido limitado pelo elipsoide $z^2 + 9r^2 = 9$.*

Exercício 2.6.3 *Ache a área da superfície delimitada no plano $2x+y+z = 4$ e pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 4$.*

Exercício 2.6.4 *Ache a área da superfície no primeiro octante delimitada no cilindro $x^2 + y^2 = 25$ e pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 1$ e $z = 3$.*