5.5 O Conjunto de Cantor

Teorema 5.5.1 *O conjunto de Cantor que será descrito possui um conjunto com as seguintes propriedades:*

a) É compacto;

b) Tem interior vazio e, por isso, não contém intervalos;

c) Não contém pontos isolados, ou seja, todos os seus pontos são de acumulação;

d) É um conjunto-não enumerável.

Demonstração: A demonstração será construída a seguir. ■

Comecemos descrevendo o modo de construir o conjunto. O *Conjunto de Cantor* K é um subconjunto fechado do intervalo $[0,1]$, obtido como o complementar de uma reunião de intervalos abertos do seguinte modo: retira-se do intervalo $[0,1]$ o terço médio aberto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Depois, retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},1\right]$.
Dessa forma, restará o conjunto

$$\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

Em seguida, retira-se o terço médio de cada um desses quatro intervalos e, dessa forma, repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Vamos a demonstração do teorema.

a) Seja $I_1,\ I_2,\ \cdots,\ I_n,\ \cdots$ os intervalos abertos omitidos, então, o conjunto $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ é um conjunto aberto e, por isso, $F=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ é um conjunto fechado. Logo, $K=[0,1]\cap F$ é um conjunto fechado e, por $k\subset[0,1]$, segue que k é limitado e, portanto, K é compacto.

b) Sobre K ter interior vazio, observe que depois da n-ésima etapa de sua construção, restam apenas intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Dessa forma, dado qualquer intervalo $J\subset[0,1]$ de comprimento $c>0$, se tomarmos $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n}<c$, então, o intervalo J estará dividido e, por isso, não será um intervalo. Portanto, K não possui intervalos.

c) Os pontos extremos dos intervalos obtidos nas diversas etapas da construção do conjunto de Cantor, tais como $\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9}$, *etc.* são elementos de K e eles constitui um conjunto enumerável E, visto que $E\subset\mathbb{Q}$. Além disso, seja c um extremo de um intervalo, digamos (c,b), omitido na construção de K. Logo, restou um certo intervalo $[a, c]$. Nas próximas etapas da construção do conjunto restam apenas os terços finais do intervalo, ou seja, $[a_n, c]$, com $a_n \in E$. Como o comprimento $c - a_n$ tende a zero, segue que $a_n \to 0$ e, por isso, c não é ponto isolado.

Suponha agora que c não seja extremo de intervalo retirado na construção do conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou depois da n-ésima etapa da construção do conjunto K. Dessa forma, temos que $x_n < c < y_n \in K$, com $y_n - x_n = \dfrac{1}{3^n}$. Logo, $c = \lim x_n = \lim y_n$ e, por isso, c é um ponto de acumulação e, portanto, K não possui pontos isolados.

d) Por fim, mostremos que o conjunto de Cantor é não-enumerável. Para isso, considere qualquer subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \subset K$, mostraremos que sempre existe um número $c \in K$ tal que $c \neq x_n$, para do n. Considere um ponto em K e tome um intervalo I_1 compacto, não-degenerado centrado nesse ponto tal que $x_1 \neq I_1$. Como nenhum ponto de K é isolado, segue que $I_1 \cap K$ é um conjunto infinito, compacto e sem pontos isolados. Em seguida, para algum ponto de K interior a I_1, tome o intervalo compacto, não degenerado, centrado nesse ponto $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \neq I_2$. Repetindo-se esse processo, obtemos uma sequência de intervalos compactos, não-vazios, tais que $x_n \neq I_n$, $I_n \cap K \neq \varnothing$. Dessa forma, existe um ponto $c \in I_n$, para todo n. Escolhendo $y_n \in I_n \in K$, segue que $y_n \to c$ e, sendo K fechado, segue que $c \in k$. Portanto, $c \in I_n \cup K$ $x_n \neq c$, para todo n, ou seja, K não é enumerável.