Capítulo 3

Números Cardinais

3.1 Função

Com os números naturais é possível construir o processo de "contagem" e, com isso, é possível responder a questões do tipo: "quantos elementos tem esse conjunto?". Para isso é preciso da ideia de bijetividade.

Definição 3.1.1 *Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se: "uma função de X em Y) é uma regra (ou um conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ a um único elemento $y = f(x) \in Y$ (lê-se "y igual a f de x").*

O conjunto X é chamado de *Domínio* da função f e o conjunto Y é chamado de *Contradomínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $y = f(x)$ é chamado de imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Exemplo 3.1.1 1. *A Função Identidade, que leva todo elemento $x \in X$ nele mesmo, ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x \end{array}.$$

2. *A Função Constante, que leva todo elemento $x \in X$ num mesmo valor $a \in Y$, ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & y = f(x) = a \text{ (constante)} \end{array}.$$

3. *A função Seno, que leva todo elemento $x \in X$ no mesmo $y = sen(x)$, ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} sen: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & y = sen(x) \end{array}$$

□

Uma função é composta de três elementos: o domínio, o contradomínio e a lei de correspondência. Logo, perguntas do tipo: "Qual o domínio da função $\frac{1}{x}$?" não é correta., sendo que a pergunta correta seria "qual o maior subconjunto $x \in \mathbb{R}$ tal que a fórmula $\frac{1}{x}$ define uma função?". Uma conclusão disso é que duas funções $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são iguais se, e somente se, $x = x'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Exemplo 3.1.2 *1. Seja X o conjunto formado por todos os triângulos do plano Π. Assim, $f : X \in \mathbb{R}$ que associa a cada triângulo ao valor de sua área A é uma função, sendo*

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t) = A \end{array}.$$

2. Seja S o conjunto formado por todos os segmentos de reta do plano Π e seja Δ o conjunto de todas as retas do plano Π. Assim, $f : S \to \Delta$ que associa a cada segmento $s \in S$ a sua mediatriz $m \in \Delta$ é uma função, sendo

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \Delta \\ & s & \mapsto & f(s) = m \end{array}.$$

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural ao seu sucessor é uma função, sendo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & f(n) = n + 1 \end{array}.$$

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural n ao número $f(x)^2 + 3 = n$ não representa uma função com domínio $\mathbb{N}$, visto que 2 não pode ser escrito na forma $2 = f(x)^2 + 3$.

5. Seja Y o conjunto formado por todos os triângulos do plano Π. $f : \mathbb{R} \to Y$ que associa a cada número real x aos triângulos de área medindo x não representa uma função, pois existem infinitos triângulos de área igual a x.

Definição 3.1.2 *Uma função $f : X \in Y$ é dita ser Injetiva quando elementos diferentes de X são transformados por f em elementos diferentes de Y.*

Assim, f é injetiva quando $x \neq x'$ em X, implica que $f(x) \neq f(x')$. A contrapositiva dessa afirmação é,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Exemplo 3.1.3 *No Exemplo 3.1.1 tem-se que o item (1) é injetiva, mas os itens (2) e (3) não são injetivas. Já no Exemplo 3.1.2, tem-se que o item (3) é injetiva, mas os itens (1) e (2) não são injetivas.*

Definição 3.1.3 *Uma função $f : X \in Y$ é dita ser Sobrejetiva quando para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que $y = f(x)$.*

Em outras palavras, f é sobrejetiva se

$$Y = f(X), \text{ ou seja, } Im_f = CD_f.$$

Exemplo 3.1.4

- *No Exemplo 3.1.1 item* (1), *tem-se que f é sobrejetiva, visto que $Im_f = \mathbb{R} = CD_f$.*
- *No Exemplo 3.1.1 item* (2), *tem-se que f não é sobrejetiva, visto que $Im_f = \{cte\} \neq Y = CD_f$.*
- *No Exemplo 3.1.1 item* (3), *tem-se que f não é sobrejetiva, visto que $Im_f = [-1, 1] \neq \mathbb{R} = CD_f$.*
- *No Exemplo 3.1.2 item* (1), *tem-se que f não é sobrejetiva, visto que $Im_f = \mathbb{R}^*_+ \neq \mathbb{R} = CD_f$.*
- *No Exemplo 3.1.2 item* (2), *tem-se que f é sobrejetiva, visto que $Im_f = \Delta = CD_f$.*
- *No Exemplo 3.1.2 item* (3), *tem-se que f não é sobrejetiva, visto que $Im_f = \mathbb{N} \setminus \{1\} \neq \mathbb{N} = CD_f$.*

Definição 3.1.4 *Uma função $f : X \in Y$ é dita ser uma Bijeção, ou uma Correspondência Bionívoca, entre X e Y quando f é ao mesmo tempo bijetiva ou sobrejetiva.*

Exemplo 3.1.5 *Sendo $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, se $f : X \to Y$ é dada pela regra $f(n) = 2n$, então, f é uma bijeção entre X e Y. De forma geral, a função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & P \text{ (conjunto do números pares)} \\ & n & \mapsto & f(n) = 2n \end{array},$$

é uma bijeção.

Solução: **De fato**: Seja $f : \mathbb{N} \to P$ (conjunto do números pares) definida por $f(n) = 2n$. Então,

- f é injetiva: se $x_1 \neq x_2$, então, $f(x_1) = 2x_1 \neq 2x_2 = f(x_2)$ e, por isso, f é injetiva.
- f é sobrejetiva: Suponha por absurdo que f não é sobrejetiva. Então, existe um número par n tal que $n \neq 2x$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Seja $X = \{x \in \mathbb{N} | x \neq 2x\}$, logo $X \neq \varnothing$. Tem-se que $2 = 2.1$ e, por isso, $2 \in X^C$ e, por isso, $X^C \neq \varnothing$ e, consequentemente, $X \neq \mathbb{N}$.

  Seja x_0 o menor elemento de X, elemento esse que existe pelo princípio da boa ordenação. Como os números pares aparecem em ordem alternada na sequência dos números naturais, tem-se que o antecessor do antecessor de x_0, denotado por x_1, também é um número par e não pertence ao conjunto X, logo $x_1 = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Como x_1 é o antecessor do antecessor de x_0, segue que $x_0 = (x_1+1)+1$. Assim, $x_0 \neq 2t$, para todo $t \in \mathbb{N}$ e $x_0 = (x_1+1)+1 = 2k+2 = 2(k+1)$, o que gera um absurdo. Portanto, $X = \varnothing$ e, consequentemente, f é sobrejetiva.

□

Exemplo 3.1.6 *Seja Y a base de um triângulo e X um segmento paralelo a Y, ligado aos outros dois lados do triângulo, como ilustrado no Figura 3.1.*

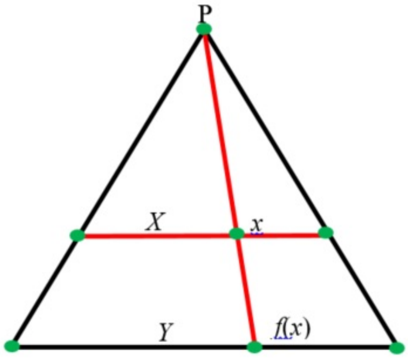

Figura 3.1: Representação da função f do Exemplo 3.1.6.

Seja ainda P o vértice oposto à base Y. Considere $f : X \to Y$ a regra que associa a cada número $x \in X$ ao ponto $f(x) \in Y$ onde a semirreta Px intersecta a base Y. Nessas condições, a função f é uma bijeção.

□

Exemplo 3.1.7 *Seja X o conjunto formado por todos os pontos, exceto o ponto P de uma circunferência e seja Y uma reta paralela ao diâmetros que passa por P, como ilustrado no Figura 3.2.*

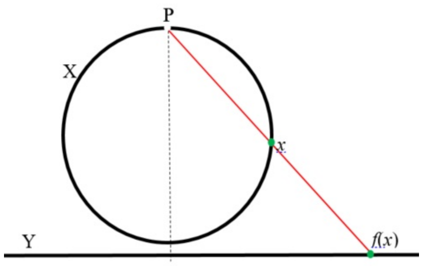

Figura 3.2: Representação da função f do Exemplo 3.1.7.

Considere $f : X \to Y$ a regra que associa a cada número $x \in X$ ao ponto $f(x) \in Y$ que é obtido com a intersecção da semirreta Px com a reta Y. Nessas condições, a função f é uma bijeção.

□

Definição 3.1.5 *Diz-se que dois conjuntos X e Y tem o mesmo número cardinal quando é possível estabelecer uma bijeção f de X em Y.*

Exemplo 3.1.8 *No Exemplo 3.2 tem-se que uma reta e uma circunferência menos um ponto tem o mesmo número cardinal. Por outro lado, se $X = \{1\}$ e $Y = \{1, 2\}$, então, não pode existir uma bijeção $f : X \to Y$ e, por isso, o número cardinal de X e de Y são diferentes.*

□

3.2 Conjuntos Finitos

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja I_n o conjunto dado por

$$I_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n\} = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim tem-se: $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ e assim por diante.

Definição 3.2.1 *Seja X um conjunto. Então, diz-se que X é Finito, e que X possui n elementos se existe uma bijeção $f : I_n \to X$. O número n é chamado de número cardinal do conjunto X, ou simplesmente, de o número de elementos de X.*

Para evitar futuras exceções, inclui-se o conjunto vazio entre os conjuntos finitos com zero elementos. Além disso, colocando $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $\cdots$, $f(n) = x_n$, pode-se escrever $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

Definição 3.2.2 *Um conjunto X é dito ser Infinito, se X não for finito.*

Em outras palavras, um conjunto X é dito ser infinito se ele não for o conjunto vazio ou se não existe uma bijeção $f : I_n \to X$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.2.1

1. *Sendo $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $f : X \to Y$ dada pela regra $f(n) = 2n$ é uma bijeção entre X e Y e, por isso, Y é um conjunto de 5 elementos.*

2. *$\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.*

   ***De fato**: suponha, por absurdo que $\mathbb{N}$ é finito. Então, existe uma bijeção $f : I_n \to \mathbb{N}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Considere o número natural k dado por $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$. Da definição de k segue que $k > f(i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$ com $i \leq n$. Assim não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$, gerando um absurdo. Logo, f não é uma bijeção. Como isso vale para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\mathbb{N}$ tem infinitos elementos.*

   Do Exemplo 3.1.5, segue que o conjunto dos números pares é infinito.

□

Teorema 3.2.1 *O número cardinal de um conjunto finito X, que será denotado por $n(X)$ goza das seguintes propriedades:*

1. *O número de elementos de um conjunto finito é o mesmo, independente da contagem adotada. Logo, se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijeções, segue que $m = n$.*

2. *Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e $n(Y) \leq n(X)$. Tem-se $n(Y) = n(X)$ somente quando $Y = X$.*

3. *Se X e Y são conjuntos finitos, então, $X \cup Y$ também é um conjunto finito e tem-se $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$.*

4. *Seja X e Y conjuntos finitos. Se $n(X) \geq n(Y)$, nenhuma função $f : X \to Y$ é injetiva e nehuma função $g : Y \to X$ é sobrejetiva.*

Demonstração:

1. Seja X um conjunto finito com k elementos. Considere $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ duas formas de contar os elementos de X (duas bijeções). Considere também $\varphi : I_m \to I_n$ a função dada por $\varphi(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$. Nestas condições, tem-se que: φ é uma bijeção. **De fato**:

   - φ é injetiva: como $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijeções, para os elementos $x_1, x_2 \in X$ distintos, existem números naturais distintos $j_1, j_2 \in \{1, 2, \cdots, m\}$ (pois f é injetiva) e números naturais distintos $i_1, i_2 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (pois g é injetiva) tais que $f(j_1) = x_1 = g(i_1)$ e $f(j_2) = x_2 = g(i_2)$. Assim, suponha que φ não é injetiva, então, existem $j_1 \neq j_2 \in \{1, 2, \cdots, m\}$ (consequentemente, $i_1 \neq i_2$) tais que $\varphi(j_1) = \varphi(j_2)$. Logo,

   $$\varphi(j_1) = \varphi(j_2) \Rightarrow (g^{-1} \circ f)(j_1) = (g^{-1} \circ f)(j_2) \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow g^{-1}(f(j_1)) = g^{-1}(f(j_2)) \Rightarrow g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2) \Rightarrow i_1 = i_2,$$

   o que é uma contradição. Portanto, φ é injetiva.

   - φ é sobrejetiva: como $g : I_n \to X$ é uma bijeção, segue que para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, existe um $x \in X$ tal que $g(i) = x$ e, consequentemente, $g^{-1}(x) = i$. Da mesma forma, como $f : I_m \to X$ é uma bijeção, existe um $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $f(j) = x$. Assim, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, segue que

   $$\varphi(j) = (g^{-1} \circ f)(j) = g^{-1}(f(j)) = g^{-1}(x) = i.$$

   Portanto, φ é sobrejetiva e, consequentemente, φ é uma bijeção de I_m em I_n. Por isso, $n = n(I_n) = m$.

2. Seja $Y \subset X$ um subconjunto de um conjunto X. Assim, pode-se considerar $X = I_n$, por causa da existência de um bijeção $f : I_n \to X$ entre os dois conjuntos. A proposição será demonstrada agora por indução. Se $X = I_1$, então, $Y = \varnothing$ ou $Y = X$. Nessas condições, segue que Y é finito e $n(Y) = 0$ ou $n(Y) = 1$ e, portanto, $n(Y) \leq n(X) = 1$.

   Suponha que seja válida a sentença para n e considere agora $X = I_{n+1}$. Seja $Y \subset X$. Se $Y \subset I_n$ segue, da hipótese de indução, que vale a finitude de Y e que $n(Y) \leq n(X)$. Por outro lado, se $Y \not\subset I_n$, segue que $Y \subset I_n \cup \{n+1\}$. Assim, se $Y = \{n+1\}$ o resultado já está válido. Caso contrário, $Y \setminus \{n+1\} \subset I_n$ e, consequentemente, existe uma bijeção $f_n : I_p \to Y \setminus \{n+1\}$, com $p \leq n$ (pela hipótese de indução). Então, considerando $f_{p+1} : I_p + 1 \to Y$ colocando $f_{p+1}(i) = f_p(i)$, se $i \neq n+1$ e $f_{p+1}(n+1) = n+1$, segue que f_{p+1} é uma bijeção entre I_{p+1} e Y, el aém disso, como $p \leq n$, segue que $p+1 \leq n+1$, completando o resultado. Do item (1) segue que $n = m$ somente quando $Y = X$.

3. Sejam X e Y dois conjuntos finitos. Então, existem $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to Y$ bijeções, com $n(X) = n$ e $n(Y) = m$. Seja $Z = X \cap Y$. Considere $x \in A = \{1, 2, \cdots, m, m+1, \cdot, m+n\}$. Assim, para todo $x \in A$, tem-se que $1 \leq x \leq m$, ou existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq t \neq n$ e $x = m + t$.

   - $Z = \varnothing$: Nesse caso, tome a função $h : I_{m+n} \to X \cup Y$ dada por: $h(x) = f(x)$, se $1 \leq x \leq m$, e $h(x) = g(t)$ ($1 \leq t \leq n$ tal que $x = m + t$), se $x > m$. Nesse caso, h é uma bijeção entre I_{m+n} e $X \cup Y$ e, por isso, $n(X \cup Y) = m + n$.
   - $Z \neq \varnothing$: Nesse caso, $W = Y \setminus Z$. Logo, $n(W) \neq 0$ e, consequentemente, $n(Y) = k + t$, onde $n(W) = k$ e $n(Z) = t$. Nessa condição, existe (pelo item anterior) uma bijeção entre I_{m+k} e $X \cup W = X \cup Y$ e, por isso, $n(X \cup Y) = m + k = m + n - t$.

4. Seja X e Y conjuntos finitos tais que $n(X) \geq n(Y)$. Considere $f : X \to Y$ uma função injetiva, então elementos distintos de X estão ligados a elementos distintos de Y. Como $f(X) \subset Y$, segue que $n(F(X)) \leq n(Y) \leq n(X)$. Ou seja, como f é uma função, todo elemento de X está ligado a algum elemento de Y e como tem mais elementos em X do que em Y, pelo menos um elemento de Y está ligado a dois elementos distintos de X, ou seja, f não pode ser injetiva.

   Por outro lado, seja X e Y conjuntos finitos tais que $n(X) \geq n(Y)$. Considere $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva, assim $CD_f = Im_f$. Novamente, como $f(X) \subset Y$, segue que $n(F(X)) \leq n(Y) \leq n(X)$. Ou seja, como f é uma função, e tem mais elementos em $F(X)$ do que em X, segue que existem elementos em $F(X)$ que não estão ligados a ninguém, pois caso contrário f não seria uma função. Logo, f não é sobrejetiva.

□

A parte injetiva do item (4) do Teorema 3.2.1 é conhecida como sendo o "Princípio da casa dos Pombos" ou "Princípio das Gavetas": se houver mais pombos (ou objetos) do que casas (ou gavetas), pelo menos uma das casas (ou das gavetas) vai receber mais do que um pombo (ou objeto).

Exemplo 3.2.2 *Tome um número natural k de 1 a 9. Todo número natural m possui um múltiplo cuja representação decimal contém apenas os algarismos k ou zero.*

Solução: De fato: Seja $X = \{k, kk, kkk, \cdots, kk \cdots kk\}$ o conjunto formado pelos m primeiros números naturais representados apenas pelo algarismo k. Se $m = x.t$, com $x \in X$ o resultado é válido. Caso contrário, considere uma função $f : X \to Y$, tal que $Y = \{1, 2, \cdots, m-1\}$ e $f(x)$ seja definida pelo resto da divisão de x por m. Como X tem mais elementos do que Y, segue do Princípio da Casa dos Pombos que existem números $x_1 < x_2$ em X tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Logo, $x_2 - x_1$ é múltiplo de m. Como x_1 tem p algarismos k e x_2 tem $p + q$ algarismos k, segue que $x_2 - x_1$ tem p algarismos k e p algarismos 0. □

Exemplo 3.2.3 *Numa reunião com n pessoas ($n \geq 2$) há, pelo menos, duas pessoas que tem o mesmo número de amigos naquele grupo.*

Solução: Suponha que sejam colocadas n caixas numeradas de 0 a $n-1$ e que cada participante do grupo receba um cartão que deva ser colocado na caixa que corresponde ao número de amigos dele no grupo.

É importante ressaltar que as caixas 0 e $n-1$ não podem receber cartões ao mesmo tempo, visto que se alguém não tem nenhum amigo, então, outra pessoa não pode ser amigo de todos ao mesmo tempo. Assim, tem-se n cartões e $n-1$ caixa. Logo, pelo princípio das gavetas, pelo menos uma das caixas vai ter recebido dois cartões. □

3.3 Sobre Conjuntos Infinitos

Cantor mostrou que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades e provou que não existe uma bijeção entre o conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, e nem uma bijeção entre um conjunto X e o seu conjuntos das partes $\wp(X)$. Cantor provou também que a reta, o plano e o espaço n-dimensional tem o mesmo número cardinal.

É importante destacar que quando X é um conjunto finito, então, $f : X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. Contudo, para conjuntos infinitos isso não vale.

Exemplo 3.3.1

1. *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que liga cada número real n ao número $f(n)$ de fatores primos distintos de sua decomposição é sobrejetiva, mas não é injetiva (considere $n_1 = 2$ e $n_2 = 3$, então, $f(n_1) = f(n_2)$).*

2. *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que liga cada número real n ao número $f(n) = 2n$ é injetiva, mas não é sobrejetiva (o número $n = 3$ não é imagem de ninguém).*

3. *As funções $g(n) = n + 1$, $h(n) = 3n$, $f(n) = n + 30$, todas de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, são todas injetivas, mas não são sobrejetivas.*

Exemplo 3.3.2 ***(O Grande Hotel de Cantor** ou o **Hotel de Hilbert**:)* *Imagine um hotel com infinitos quartos, o quarto número 1, o quarto número 2, o número 3 e assim por diante. Imagine agora que este hotel está lotado. Chega então um novo casal de hóspedes, como alojá-los? Se fosse um hotel comum, um hotel finito não haveria jeito. No hotel infinito basta pedir a cada* *hóspede o favor de se mudar para o quarto ao lado: os hóspedes do quarto 1 passam para o quarto 2, os do 2 passam para o quarto 3 e assim por diante. O quarto 1 fica vago para receber casal recém chegado.*

Agora responda você: e se chegasse no Hotel de Hilbert já lotado o ônibus infinito de uma excursão Hilbertiana, trazendo infinitos novos hóspedes? Será que você conseguiria acomodá-los todos sem desalojar os que já estão no hotel?