Capítulo 1

Conjuntos Finitos e Infinitos

1.1 Números Naturais

O Conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos *Axiomas de Peano*:

(1) Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se *Sucessor* de n.

(2) Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Se $X \subset \mathbb{N}$, tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$, ou seja, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$, segue que $X = \mathbb{N}$.

O axioma (3) é chamado de *Princípio de Indução Finita*, sendo esse base, principalmente, para a demonstração de teoremas sobre números naturais. Este método é conhecido como *Método de Indução Finita* (ou *Recorrência*) e ele é enunciado como a seguir:

"Se uma propriedade P vale para o número 1 e se supondo que P é valida para o número n resulta que P é válida também para o sucessor $s(n)$ de n, então, P é válida para todos os números naturais."

Os axiomas de Peano podem ser reescritos numa linguagem mais simples como a seguir:

(1') Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.

(2') Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro número natural.

(3') Se um subconjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então, esse conjunto contém todos os números naturais.

Veja um exemplo.

Exemplo 1.1.1 *Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $s(n) \neq n$.*

Solução: Pelo Axioma (2) de Peano, temos que $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $1 \neq s(1)$. Agora, suponha que $n \neq s(n)$ (Hipótese de Indução). Assim como s é injetiva, segue que $s(n) \neq s(s(n))$ e, consequentemente, a propriedade também é válida para o sucessor de $s(n)$. Portanto, pelo princípio da indução finita, seque que $n \neq s(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Agora vamos definir duas operações para os números naturais: a *Adição* e a *Multiplicação*. Assim, temos que no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são definidas duas operações fundamentais, que são apresentadas a seguir.

Adição:	$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$
Multiplicação:	$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (m,n) & \mapsto & m\cdot n \end{array}$

Para estas operações são assumidas as seguintes identidades (definição):

- $s(m) = m + 1$;
- $s(m + n) = s(m) + n = m + s(n) = m + n + 1$;
- $m \cdot 1 = m$;
- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Com essas definições podemos estabelecer algumas das propriedades conhecidas dessas operações como, por exemplo, a associatividade e a comutatividade, como apresentaremos a seguir.

Teorema 1.1.1 *Sejam a, b e c números naturais. Então, para a operação de adição valem as seguintes propriedades:*

a) A adição é Associativa, ou seja,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

b) A adição é Comutativa, ou seja,

$$a + b = b + a.$$

c) Para a adição vale a Lei do Corte, ou seja,

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b.$$

Demonstração:

a) Provemos por indução finita. Para o caso $c = 1$ e das identidades da definição da adição, segue que $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ e, por isso, a propriedade é válida para o caso $c = 1$. Suponha agora que a propriedade seja válida para c (hipótese de indução), ou seja, $(a+b)+c = a+(b+c)$. Assim, para o sucessor $s(c)$ de c, temos que:

$$(a + b) + s(c) = (a + b) + (c + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)+(c+1) = ((a+b)+c)+1 \text{ (vale para o caso) } = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((a+b)+c)+1 = (a+(b+c))+1 \text{ (hpótese de indução) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+(b+c))+1 = a+((b+c)+1) \text{ (vale para o caso) } = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+((b+c)+1) = a+(b+(c+1)) \text{ (vale para o caso) } = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+(b+(c+1)) = a+(b+s(c)).$$

Portanto, como a associatividade é válida para $c = 1$ e, supondo que ela vale para c, ela continua sendo válida para o sucessor $s(c)$ de c, segue do Princípio da Indução Finita, *P.I.F.*, que a propriedade associativa é válida para todo $c \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(a+b)+c = a+(b+c), \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

b) Para provar a comutatividade, vamos iniciar demonstrando que a comutativa vale para o caso $b = 1$, ou seja, que $a+1 = 1+a$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Façamos por indução.

Para $a = 1$, seque claramente que $1+1 = 1+1$ e, por isso, a propriedade vale quando $a = 1$. Suponha que a propriedade seja válida para a (hipótese de indução), ou seja, que $a+1 = 1+a$. Assim, para o sucessor $s(a)$ de a temos que

$$1+s(a) = 1+(a+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+(a+1) = (1+a)+1 \text{ (associatividade) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+a)+1 = (a+1)+1 \text{ (hipótese de indução) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)+1 = s(a)+1 \text{ (hipótese de indução).}$$

Portanto, como a propriedade é válida para $a = 1$ e, supondo que ela seja válida para a, ela também continua válida para o sucessor de a, segue do *P.I.F.*, que

$$a+1 = 1+a, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, a comutativa é uma propriedade válida para $b = 1$. Agora, é preciso provar o caso para o sucessor de b. Para isso, suponha que $a+b = b+a$ (hipótese de indução). Assim, para o sucessor $s(b)$ de b, temos que

$$a+s(b) = a+(b+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+(b+1) = (a+b)+1 \text{ (associatividade) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)+1 = (b+a)+1 \text{ (hipótese de indução) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+a)+1 = b+(a+1) \text{ (associatividade) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b+(a+1) = b+(1+a) \text{ (vale para 1) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b+(1+a) = (b+1)+a \text{ (associatividade) } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+1)+a = s(b)+1$$

e, por isso, a propriedade vale para o sucessor de b. Portanto, como a propriedade comutativa é válida para $b = 1$ e, supondo que ela vale para b, a propriedade continua sendo válida para o sucessor b, segue do $P.I.F.$ que a comutatividade vale para todo b, ou seja,

$$a + b = b + a, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{N}.$$

c) Para a lei do corte, sabendo que $a+1$ é o sucessor de a, $b+1$ é o sucessor de b, e como $a + 1 = b + 1$, segue que $a = b$, pois números naturais com os mesmos sucessores são iguais. Portanto, a propriedade é válida para $c = 1$, isto é,

$$a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b.$$

Agora, suponha que seja válido para c (hipótese de indução), ou seja, $a + c = b + c \Rightarrow a = b$. Assim, para o sucessor $s(c)$ de c, temos que

$$a + s(c) = b + s(c) \Rightarrow a + (c + 1) = b + (c + 1)$$

$$a + (c+1) = b + (c+1) \Rightarrow (a + c) + 1 = (b + c) + 1 \text{ (pela associatividade)}$$

$$(a + c) + 1 = (b + c) + 1 \Rightarrow a + c = b + c \text{ (vale para 1)}$$

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b \text{ (hipótese de indução).}$$

Portanto, como a lei do corte vale para $c = 1$, e supondo que ela seja válida para c, ela continua sendo válida para o sucessor de c, segue do $P.I.F.$ que a lei do corte vale para todo $c \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

■

Um teorema semelhante existe para a multiplicação, como veremos a seguir.

Teorema 1.1.2 *Sejam a, b e c números naturais. Então, para a operação de multiplicação valem as seguintes propriedades:*

a) *associativa:* $(a.b).c = a.(b.c)$*;*

b) *comutativa:* $a.b = b.a$*;*

c) *lei do corte:* $a.c = b.c \Rightarrow a = c$*;*

d) *distributiva em relação à adição:* $a.(b + c) = ab + ac$*.*

Demonstração:

a) Provemos por indução finita. Para isso, observe que para $c = 1$ temos que

$$(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b \text{ (por definição)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot b = a \cdot (b \cdot 1) \text{ (por definição)}$$

e, por isso, segue que a propriedade é válida para $c = 1$. Suponha que a propriedade seja válida para c (hipótese de indução), ou seja, que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Assim, para o sucessor $s(c)$ de c temos que

$$(a \cdot b) \cdot (c + 1) = (a \cdot b) \cdot c + (a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot (b \cdot c) + a \cdot (b \cdot 1) =$$

$$= a \cdot (b \cdot c + b) = a \cdot (b \cdot (c + 1)).$$

Portanto, supondo a e b quaisquer, como a propriedade vale para $c = 1$ e supondo que a mesma é válida para c ela continua verdadeira para o sucessor de c segue do $P.I.F.$ que a propriedade é válida para todo número natural, ou seja,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

b) Agora vamos provar a comutatividade na multiplicação. Observe que $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$, logo a propriedade vale para o caso $a = 1$. Agora, suponha que a propriedade seja válida para a (hipótese de indução), ou seja, que $a \cdot 1 = 1 \cdot a$. Assim, para o sucessor de a temos que

$$1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = a + 1 = (a + 1) \cdot 1$$

e, por isso, a propriedade também vale para o sucessor de a. Portanto, como a propriedade vale para $a = 1$ e supondo que ela vale para a ela continua sendo válida para o sucessor de a, segue do $P.I.F.$ que a propriedade é válida para todo número natural, ou seja, que

$$1 \cdot a = a \cdot 1, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, temos que a comutativa na multiplicação vale para $b = 1$. Agora, suponha que a propriedade vale para b, ou seja, que $a \cdot b = b \cdot a$. Daí, para o sucessor de b, temos que

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1 = b \cdot a + 1 \cdot a = (b + 1) \cdot a.$$

Assim, como a propriedade vale para $b = 1$ e supondo que a propriedade é válida para b ela continua valendo para o sucessor de b, segue do $P.I.F.$ que a propriedade comutativa vale para quaisquer números naturais, ou seja,

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{N}.$$

c) Provemos a lei do corte para a multiplicação. Para $c = 1$ temos que $a \cdot 1 = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$. Agora, suponha que a propriedade seja válida para c (hipótese de indução), ou seja, que $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$. Daí, para o sucessor $s(c)$ de c temos que

$$a \cdot (c + 1) = b \cdot (c + 1) \Rightarrow a \cdot c + a \cdot 1 = b \cdot c + b \cdot 1 \Rightarrow a \cdot c + a = b \cdot c + b.$$

Como $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ (pela hipótese de indução), segue que

$$a \cdot c + a = b \cdot c + b \Rightarrow a + a = b + b \Rightarrow a = b$$

e, portanto, como a propriedade é válida para $c = 1$ e supondo que ela vale para c ela continua sendo válida para o sucessor de c, segue do $P.I.F.$ que a propriedade vale para todos os trios de números naturais, ou seja,

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

d) Para $c = 1$, temos que $a \cdot (b+1) = a \cdot b + a$ e da definição da multiplicação temos que a propriedade vale para $c = 1$. Agora suponha que a propriedade vale para c (hipótese de indução), ou seja, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Então, para o sucessor $s(c)$ de c temos que

$$a \cdot (b + (c+1)) = a \cdot ((b+c)+1) = a \cdot (b+c) + a \cdot 1 =$$

$$= a \cdot b + a \cdot c + a \cdot 1 = a \cdot b + a \cdot (c+1).$$

Assim, como a propriedade é válida para $c = 1$ e supondo que ela vale para c ela continua sendo válida para o sucessor de c, segue do $P.I.F.$ que a propriedade vale para todo trio de números naturais, ou seja,

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

■

Agora vamos apresentar uma "*Ordem*" para o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ou seja, estabeleceremos uma maneira de comparar dois ou mais números naturais.

Definição 1.1.1 *Considere $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que a é Menor do que b, e escrevemos $a < b$, se existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + c$. Dizemos que a é Menor do que ou Igual a b, e escrevemos $a \leq b$, se $a < b$ ou $a = b$.*

Apresentaremos a seguir algumas propriedades da ordem.

Teorema 1.1.3 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Assim, a relação de ordem "Menor do que" possui as seguintes propriedades:*

a) Vale a Transitividade, ou seja, se $a < b$ e $b < c$, então, $a < c$.

b) Vale a Tricotomia, ou seja, ocorre uma, e somente uma, das alternativas a seguir: $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.

c) Vale a Monotonicidade, ou seja, se $a < b$, então, $a + c < b + c$ e $ac < bc$.

Demonstração:

a) Se $a < b$, então, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + p$. Analogamente, se $b < c$, então, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $c = b + q$. Assim,

$$c = b + q = (a + p) + q = a + (p + q).$$

Daí, como $r = p + q \in \mathbb{N}$ e $c = a + r$, segue que $a < c$.

b) Se $a = b$, então, não pode ocorrer $a < b$ ou $b < a$. Dessa forma, considere que $a \neq b$ e que $a < b$. Suponha, por absurdo, que também seja válido $b < a$, consequentemente, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + c$. Daí,

$$a < b \Rightarrow b + c < b \text{ e } b < b + 1 \Rightarrow b + c < b + 1 \Rightarrow c < 1,$$

o que é um absurdo, visto que $c \in \mathbb{N}$. Portanto, se $a < b$, então, não vale $b < a$.

c) Para a monotonicidade da adição, como $a < b$, segue que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + p$. Assim, tomando $c \in \mathbb{N}$ temos que

$$b + c = (a + p) + c = a + (p + c) = a + (c + p) = (a + c) + p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b + c = (a + c) + p \Rightarrow a + c < b + c,$$

visto que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $b + c = (a + c) + p$. Agora, para a monotonicidade da multiplicação, observe que se $a < b$, então, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + p$. Daí, sendo $c \in \mathbb{N}$, temos que

$$b = a + p \Rightarrow b \cdot c = (a + p) \cdot c \Rightarrow b \cdot c = a \cdot c + p \cdot c.$$

Assim, como existe $r = p \cdot c \in \mathbb{N}$ tal que $b \cdot c = a \cdot c + r$, segue que $a \cdot c < b \cdot c$.

■

Exemplo 1.1.2 *Mostre que para qualquer número natural n, não existe nenhum número natural entre n e o seu sucessor.*

Solução: Suponha que exista um número natural p tal que ele esteja entre algum número natural n e o seu sucessor, ou seja, $n < p < n + 1$. Então, como $n < p$, segue que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $p = n + r$. Analogamente, como $p < n + 1$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 = p + s$. Daí,

$$n + 1 = p + s \Rightarrow n + 1 = n + r + s \Rightarrow 1 = r + s \Rightarrow r < 1,$$

o que é um absurdo, visto que $r \in \mathbb{N}$. Portanto, não existe um número natural p entre qualquer número natural e o seu sucessor. ■

Agora vamos definir o que venha a ser elemento *Mínimo* de um conjunto de números naturais.

Definição 1.1.2 *Dizemos que um número natural $p \in X$ é o Menor Elemento (ou o Elemento Mínimo) do conjunto X se $p \leq n$, para todo $n \in X$.*

Exemplo 1.1.3 *Observe que se $X \subset \mathbb{N}$ e se $1 \in X$, segue que 1 é o menor elemento de X. Consequentemente, 1 é o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$.*

Agora vamos apresentar o *Princípio da Boa Ordenação*, que é uma propriedade muito relevante de subconjuntos de números naturais.

Teorema 1.1.4 ***(Princípio da Boa Ordenação)****: Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração: Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto não vazio. Provemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq n$, $\forall\ n \in A$. Para isso, considere I_n o conjunto formado por todos os números naturais menores ou igual a n, ou seja, $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Se $1 \in A$ segue que 1 é o menor elemento de A. Caso contrário, como $1 \notin A$, considere X como sendo o conjunto dado por

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid I_n \subset \mathbb{N} \setminus A\}.$$

É claro que $1 \in X$, visto que $I_1 = \{1\} \not\subset A$ e como $A \neq \emptyset$ segue que $X \neq \mathbb{N}$. Assim, como $1 \in X$ e $X \neq \mathbb{N}$, existe $n \in X$ tal que $s(n) \notin X$ pois, caso contrário, teríamos uma contradição com o Axioma 3 de Peano ($P.I.F.$). Então, $I_n = \{1, 2, \cdots, n\} \subset \mathbb{N} \setminus A$ e, consequentemente, $n_0 = n + 1 \in A$. Portanto, n_0 é o menor elemento do conjunto A, visto que nenhum número natural menor do que n_o pertente ao conjunto A. ■

Exemplo 1.1.4 *Prove que* $1 + n \leq 2^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Solução: Para $n = 1$, segue que $1 + 1 = 2 \leq 2^1$ e, por isso, afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha agora que a propriedade seja válida para n (hipótese de indução), ou seja, que $1 + n \leq 2^n$. Daí, para o sucessor de n, temos que

$$1 + (n + 1) = 2 + n \leq 2 + n + n = 2 + 2n = 2(1 + n) \leq 2^1 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Logo, a afirmação também é verdadeira para o sucessor de n. Portanto, segue do $P.I.F.$ que a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Definição 1.1.3 *Um número natural $p \neq 1$ é dito ser Primo quando ele não pode ser escrito da forma $p = m \cdot n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $n, m < p$.*

Exemplo 1.1.5 *Prove que todo número natural ou é primo ou é o produto de fatores primos.*

Solução: Suponha, por absurdo, que o conjunto X dos números primos ou que é o produto de fatores primos não é igual a $\mathbb{N}$ e, por isso, considere $Y = X^C = \mathbb{N} \subset X$. Consequentemente, $Y \neq \varnothing$.

Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um número natural $a \in Y$ que é o menor elemento de Y. Consequentemente, $x < a$, para todo $x \in X$. Como a não é primo, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $a = m \cdot n$. Daí, como $m, n \in \mathbb{N}$ segue que $m < a$ e $n < a$, segue que $m, n \in X$ e, por isso, $a = m \cdot n \in X$, o que é uma contradição. Como o absurdo surge ao supor que o conjunto X formado pelos números primos ou que é o produto de fatores primos não ser igual a $\mathbb{N}$, segue que vale a proposição. ■

Observação 1.1.1 *No P.I.F. podemos substituir a propriedade ser válida para* $a = 1$ *por* $a = k$*, onde* k *é um número natural conhecido.*

Exemplo 1.1.6 *Prove que* $2^n > 2n + 1$*,* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq 5$*.*

Solução: Provemos que a afirmação é verdadeira para $n = 5$. Para isso, observe que $2^5 = 32 > 11 = 2.5 + 1$. Logo, a propriedade é verdadeira para $n = 5$. Agora, suponha que a afirmação seja válida para n, com $n > 5$ (hipótese de indução), ou seja, que $2^n > 2n + 1$. Então, para o sucessor de n, temos que

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (2n+1) \cdot 2 = (2n+1) + (2n+1) > 2n+1+2 = 2(n+1)+1.$$

Portanto, como a afirmação vale para $n = 5$ e supondo que ela seja válida para n (com $n > 5$) ela continua sendo verdadeira para o sucessor de n, segue do *P.I.F.* que a afirmação é verdadeira para todo número natural maior ou igual a cinco. ■

Agora apresentaremos um princípio que nos permitirá estabelecer definições por *Recorrência.*

Teorema 1.1.5 *(**Segundo Princípio da Indução**:) Seja* $X \subset \mathbb{N}$ *um conjunto com a seguinte propriedade: Dado* $n \in \mathbb{N}$*, se* X *contém todos os números naturais* m *tais que* $m < n$*, então,* $n \in X$*. Nessas condições,* $X = \mathbb{N}$*.*

Demonstração: Seja X um conjunto com a propriedade desejada. Definia também o conjunto Y como sendo o conjunto complementar de X, ou seja, $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Suponha, por absurdo, que $Y \neq \varnothing$. Então, existe $a \in Y$ que é o elemento mínimo de Y. Então, para todo $m < a$, temos que $m \in X$ e, consequentemente, das hipóteses do teorema temos que $a \in X$, o que é uma contradição. Logo, $Y = \varnothing$ e, por isso, $X = \mathbb{N}$. ■

Observação 1.1.2 *Observe que o "Segundo Princípio da Indução", que é apresentado no Teorema 1.1.5, é uma consequência do Princípio da Boa Ordenação. Ele pode ser reescrito como a seguir:*

"Seja P *uma propriedade relativa ao números reais. Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$*. Se do fato de todo* $m < n$ *gozar da propriedade* P *puder ser inferido que* n *goza da propriedade* P*, então, todo número natural goza de* P*."*

Esse princípio nos permite estabelecer as "Definições por Recorrência".

Exemplo 1.1.7 *Seja* $a \in \mathbb{N}$ *um número fixo. Defina a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *como a seguir:* $f(1) = a$*;* $f(n+1) = a \cdot f(n)$*. Dessa forma, temos que*

- $f(2) = f(1+1) = a \cdot f(1) = a \cdot a = a^2$*;*
- $f(3) = f(2+1) = a \cdot f(2) = a \cdot a^2 = a^3$*;*
- $f(4) = f(3+1) = a \cdot f(3) = a \cdot a^3 = a^4$*;*

- $\cdots$

ou seja, $f(n) = a^n$. *Assim, fica estabelecida, por indução, a* n*-ésima potência de um número natural* a.

$\blacksquare$

Exemplo 1.1.8 *Seja* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *a função dada por:* $\phi(1) = 1$*;* $\phi(n+1) = (n+1) \cdot \phi(n)$. *Dessa forma, temos que*

- $\phi(2) = 2 \cdot 1$*;*
- $\phi(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$*;*
- $\phi(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*;*
- $\cdots$

ou seja, $f(n) = n!$. *Assim, fica estabelecida, por indução, o fatorial de* n.

$\blacksquare$

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.