Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Prova	1^a Avaliação de Álgebra Linear - 11/04/2023
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando as opções escolhidas para serem corrigidas.
- Só serão corrigida 5 (cinco) questões, e se não forem indicadas quais as opções a serem consideradas, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 08:00 as 9:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):**

a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ é invertível? Justifique a sua resposta.

b) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível e a sua matriz inversa é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO:

a) Observe que $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$ e, por isso, A não é invertível.

b) Observe que $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$ e, por isso, A é invertível. Como

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 31+4-35 & -19-2+21 \\ 0+0+0 & 0+6-5 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

segue que A^{-1} é a inversa da matriz A.

2ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):**

a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ uma matriz invertível, calcule o valor de $(A + A^{-1})^3$.

b) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$, determine os valores de x, y, z e w de forma que seja válida a identidade $AB = I_2$.

SOLUÇÃO:

a) Como a matriz A é invertível, temos que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$. Considere $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Dessa forma, temos que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ -c & = & 0 \\ -d & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & -1 \end{array} \right. ,$$

ou seja, $A = A^{-1}$. Por isso, $(A + A^{-1})^3 = (2A)^3 = 8A^3$. Observe que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = Id$$

e, consequentemente,

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot Id = A.$$

Portanto,

$$(A + A^{-1})^3 = 8A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

b) Temos que

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ 0x + 2y & = & 0 \\ 2z - w & = & 0 \\ 0z + 2w & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2} \\ y & = & 0 \\ z & = & \frac{1}{4} \\ w & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Portanto, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Obtenha a matriz dos cofatores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Precisamos calcular o cofator de todos os elementos da matriz A para construirmos a matriz dos cofatores. Assim,

- $A_{11} = (-1)^2 D_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15;$
- $A_{12} = (-1)^3 D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$
- $A_{13} = (-1)^4 D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10;$
- $A_{21} = (-1)^3 D_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -6;$
- $A_{22} = (-1)^4 D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-2) = 11;$
- $A_{23} = (-1)^5 D_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 4) = 4;$

- $A_{31} = (-1)^4 D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1;$
- $A_{32} = (-1)^5 D_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -(9-0) = -9;$
- $A_{33} = (-1)^4 D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15.$

Portanto, a matriz dos cofatores da matriz A é dada por

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 6 & 10 \\ -6 & 11 & 4 \\ 1 & -9 & -15 \end{bmatrix}.$$

4ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

SOLUÇÃO: Observe que

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & -10 \\ 0 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & -8 \\ 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 0 & -1 & -13 \\ 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & \frac{9}{5} & 1 \\ 0 & -1 & -13 \\ 0 & -9 & -24 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -13 \\ -9 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(24 - 117) = 5(-93) = -465.$$

5ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Discuta e encontre, se existir, uma solução para o sistema linear s : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = -1 \\ 3x + y - z = -3 \end{cases}$ por escalonamento.

SOLUÇÃO: Seja $[A \vdots b] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$ a matriz estendida do sistema linear s. Assim,

$$[A \vdots b] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

Dessa forma, s é um sistema linear possível e determinado, com solução dada por $x = -\frac{5}{6}$, $y = \frac{7}{6}$, $z = \frac{5}{3}$.

6ª **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO: Observe que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Portanto, A é invertível. Assim,

$$[A \vdots Id] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto, a matriz A é invertível e a sua inversa é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!