1.7 Continuidade de funções reais de várias variáveis reais

Agora é apresentado a definição de *Continuidade* para funções reais de várias variáveis reais, que tem sua ideia similar a estudada no cálculo de funções reais de uma variável real, como visto a seguir.

Definição 1.7.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $A \in D$. Então, dizemos que f é* ***Contínua*** *em A se as seguintes condições forem satisfeitas:*

i. $f(A)$ *existe;* *ii.* $\lim\limits_{P \to A} f(P)$ *existe;* *iii.* $\lim\limits_{P \to A} f(P) = f(A)$.

Se pelo menos uma dessas condições não for satisfeita, então, dizemos que f é ***Descontínua*** *em A.*

■

Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.7.1 *Mostre que as funções $f_1(x,y) = k$, $f_2(x,y) = x$ e $f_3(x,y) = y$ são contínuas, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Solução: Para $f_1(x,y) = k$: observe que

i. $f_1(a,b) = k$;

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_1(x,y) = k$ (Exemplo 1.5.1);

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_1(x,y) = f_1(a,b)$.

Por isso, temos que f_1 é contínua em todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Para $f_2(x,y) = x$, observe que:

i. $f_2(a,b) = a$;

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_2(x,y) = a$ (Exemplo 1.5.2);

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_2(x,y) = f_2(a,b)$.

Portanto, temos que f_2 é contínua em todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Para $f_3(x,y) = y$, observe que:

i. $f_3(a,b) = b$;

ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_3(x,y) = b$ (Exemplo 1.5.3);

iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_3(x,y) = f_3(a,b)$.

Portanto, temos que f_3 é contínua em todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 1.7.2 *Verifique se a função f é contínua em $(0,0)$ sabendo que:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Solução: É necessário verificar as três condições da Definição 1.7.1, ou seja, é preciso verificar se a função está definida em $(0,0)$, se o limite da função existe quanto $(x,y) \to (0,0)$ e se esses dois valores são iguais. Assim,

i. $f(0,0) = 0$, por isso, a função está definida em $(0,0)$;

ii. Temos que $x^2 \leq x^2 + y^2$ e, por isso,

$$0 \leq \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| = |3y| \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |3y| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |3y| \cdot 1 = |3y|.$$

Assim, temos que

$$f(x,y) = \begin{cases} -|3y| \leq \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} \leq |3y|, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ -|3y| \leq 0 \leq |3y|, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Ou seja, temos que

$$-|3y| \leq f(x,y) \leq |3y|.$$

Portanto, segue do Teorema do Confronto que

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -|3y| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |3y| = 0,$$

ou seja, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

iii. Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, segue que f é contínua em $(0,0)$.

■

Exemplo 1.7.3 *A função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

é contínua na origem? Por que?

Solução: Temos que $f(0,0) = 0$, por isso, a função está definida em $(0,0)$. Por outro lado, segue do Exemplo 1.5.16 que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Portanto, f não é contínua em $(0,0)$. ■

Exemplo 1.7.4 *A função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

é contínua na origem? Por que?

Solução: Temos que $f(0,0) = 0$. Contudo, como visto no Exemplo 1.5.17, temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Portanto, f não é contínua em na origem. ■

Exemplo 1.7.5 *Determine se a função f a seguir é contínua em $(0,0)$, sendo $f(x,y) = \dfrac{xy^2 + x^2y}{x^2+y^2}$.*

Solução: Temos que f não está definida em $(0,0)$ e, por isso, a função f não é contínua em $(0,0)$. Contudo, observe que

$$\left|\frac{xy^2 + x^2y}{x^2+y^2}\right| = |x|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| + |y|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq$$

$$\leq |x|\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right| + |y|\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right| = |x| + |y|.$$

Ou seja, $-(|x|+|y|) \leq f(x,y) \leq (|x|+|y|)$ e, por isso, como $-(|x|+|y|) \to 0$ e $(|x|+|y|) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, segue do Teorema do Confronto (Teorema 1.5.4) que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Assim, reescrevendo a função como

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases},$$

temos que a função g é contínua na origem. ■

Como pode ser visto nos Exemplos 1.7.4, 1.7.3 e 1.7.5, existem basicamente dois tipos de descontinuidades: um tipo quando o limite existe e outro quando o limite não existe. Se o limite não existe, então, nenhuma mudança na função vai fazer com que a mesma se torne contínua. Por outro lado, se o limite existe, então, podemos redefinir a função por $f(P) = \lim_{P\to A} f(x,y)$ e, dessa forma, temos que a nova função se torna contínua. Essa é a motivação para a próxima definição.

Definição 1.7.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que f não é contínua $A \in D$. Se o limite $\lim_{P\to A} f(P)$ existe, então, dizemos que f tem uma descontinuidade **Removível** em A. Caso o limite não exista, então, dizemos que f possui uma descontinuidade **Essencial** em A.*

■

Exemplo 1.7.6 *a) Nos Exemplos 1.7.3 e 1.7.4 a desigualdade da função é do tipo essencial, visto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.*

b) No Exemplo 1.7.5 é do tipo removível, visto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Nesse caso, redefinindo a função por

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases},$$

temos que a função g é contínua na origem.

c) Se $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$*, temos que g possui uma descontinuidade do tipo removível, pois* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *existe. Nesse caso, redefinindo a função por*

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases},$$

temos que a função g é contínua na origem.

■

Teorema 1.7.1 *Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas em um ponto* $A \in D$*, então, são válidas as seguintes propriedades:*

a) $f \pm g$ *é contínua em A;*

b) $f \cdot g$ *é contínua em A;*

c) $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em A, se* $g(A) \neq 0$.

Demonstração: Exercício. ■

Observação 1.7.1 *Uma consequência do Teorema 1.7.1 é que qualquer função Polinomial* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é contínua em todos os pontos do* $\mathbb{R}^n$.

■

Definição 1.7.3 *Uma função* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é dita ser* ***Contínua numa Bola*** $B(A, r) \subset \mathbb{R}^n$ *de centro A e raio* $r > 0$*, se ela for contínua em todos os pontos da bola* $B(A, r)$.

■

Exemplo 1.7.7 *a) Toda função polinomial* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é contínua em qualquer bola* $B(A, r) \subset \mathbb{R}^n$.

b) A função $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ *é contínua em qualquer bola* $B(A,r) \subset \mathbb{R}^2$ *que não contenha a origem, visto que f é a dada pela divisão de duas funções polinomiais cujo denominador é diferente de zero para todo* $(x,y) \neq (0,0)$.

c) A função $g(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x}$ *é contínua em todas as bolas que não contenha pontos de abscissa zero, ou seja, em todas as bolas que não contenham pontos da forma* $(0, y) \in \mathbb{R}^2$.

■

Se uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto A, segue que $f(A)$ existe. Assim, como $\lim\limits_{P\to A} f(P)$ existe, segue que usando a Definição 1.5.1 podemos reescrever a definição de continuidade similar a definição de limite, como a seguir:

Definição 1.7.4 *Temos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é* ***Contínua*** *em um ponto $A \in D$, quando para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que $P \in D$ e $||P - A|| < \delta$ implicam em $|f(P) - f(A)| < \epsilon$.*

■

O próximo resultado estabelece que a composição de funções contínuas é também contínua.

Teorema 1.7.2 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que f seja contínua em A, g seja contínua em $b = f(A)$ e que $f(D) \subset B$. Então, nessas condições, temos que a função composta $g \circ f$ é contínua em A.*

Demonstração: Não será feita. ■

Exemplo 1.7.8 *a) A função f dada por $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$ é contínua para todos os pontos do $\mathbb{R}^3$.*

De fato: *Temos que a função f pode ser vista como sendo a composição das funções*

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \cos(u) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, x) & \mapsto & x^2 + y^2 + z^2 \end{array}.$$

Dessa forma, como a função g, que é a função cosseno, é contínua em todo $u \in \mathbb{R}$ e h que é uma função polinomial, que é contínua para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, segue que $f(x, y, z) = g \circ h(x, y, z)$ é contínua em todo $\mathbb{R}^3$. □

b) A função f dada por $f(x, y) = \ln(xy - 1)$ é contínua para todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $xy - 1 > 0$.

De fato: *A função $f(x, y) = \ln(xy - 1)$ pode ser vista como sendo a composição das funções*

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \ln(u) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & xy - 1 \end{array}.$$

Como a função g, que é a função logarítmica natural, é contínua para todo número real positivo e a função h, que é uma função polinomial, é contínua para todo o $\mathbb{R}^2$, segue que $f(x, y) = g \circ h(x, y)$ é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ para os quais tenhamos $xy - 1 > 0$. □

c) A função f dada por $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ é contínua para todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

De fato: *A função $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pode ser vista como sendo a composição das funções*

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{u}} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}.$$

Como a função g, que é contínua para todo número real positivo, a função h, é contínua para todo $\mathbb{R}^2$ (função polinomial) e $h(x,y) \geq 0$ (para todo (x,y)), segue que $f(x,y) = g \circ h(x,y)$ é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ para os quais tenhamos $x^2+y^2 \neq 0$, ou seja, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. □

■

Exemplo 1.7.9 *Determine todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ para os quais a função f é contínua, sendo f a função dada por*

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}}.$$

Solução: Considere $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Então, temos que a função g é contínua em todo $u \in \mathbb{R}$ tal que $u > 0$. Considere também a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x,y) = x^2 + y^2 - 25.$$

Assim, temos que a função h é contínua em todo $\mathbb{R}^2$. Dessa forma, temos que a função f fica dada pela composição $f(x,y) = g \circ h(x,y)$ e, por isso, f é contínua em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2+y^2-25 > 0$, ou seja, f é contínua em

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 > 25\}.$$

■

O resultado a seguir relaciona continuidade com caminhos, ou seja, se uma função é contínua, então, ela será contínua sobre qualquer caminho contido no seu domínio.

Teorema 1.7.3 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um caminho tal que $\gamma(t) \in D$, para todo $t \in I$. Se γ for contínua em $t_0 \in I$ e f for contínua em $\gamma(t_0)$, então, a composta $g(t) = f(\gamma(t))$ é contínua em t_0.*

Demonstração: Exercício. ■

Exemplo 1.7.10 *Determine se a função f a seguir é contínua em $(0,0)$, sendo*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

Solução: Temos que se f for contínua em $(0,0)$, segue que f será contínua sobre todo caminho que contenha a origem. Dessa forma, como

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0),$$

segue que f não é contínua em $(0,0)$. ■

Agora faça alguns exercícios propostos. Bons estudos.......

1.8 Exercícios

Exercício 1.8.1 *Determine todos os pontos onde cada uma das funções a seguir são contínuas.*

i.) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-1}$;

ii.) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$;

iii.) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

iv.) $f(x,y) = \ln(xy^2)$;

v.) $f(x,y) = \dfrac{4x^2y+3y^2}{2x-y}$;

vi.) $f(x,y) = \dfrac{5xy^2+2y}{16-x^2-4y^2}$;

vii.) $f(x,y) = \ln(25-x^2-y^2)$;

viii.) $f(x,y) = \arccos(x+y)$;

ix.) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$;

x.) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$;

xi.) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+9y^2-36}}$;

xii.) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$;

xiii.) $f(x,y) = \operatorname{arcsec}(xy)$;

xiv.) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-9) - \ln(1-x^2-y^2)$;

xv.) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y) + \ln(xy)$;

xvi.) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(xy)$;

xvii.) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$;

xviii.) $f(x,y,z) = \ln(36-4x^2-y^2-9z^2)$;

xix.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

xx.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

xxi.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

xxii.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

xxiii.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|\,x\,|+|\,y\,|} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

xxiv.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|\,x^3\,|+|\,y^3\,|} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

xxv.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x+y)}{x+y} & \text{se} \quad x+y \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x+y = 0 \end{cases}$;

xxvi.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se} \quad x \neq y \\ x-y & \text{se} \quad x = y \end{cases}$;

xxvii.) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

xxviii.) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & \text{se} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Exercício 1.8.2 *Em cada item abaixo, temos que a função é descontínua na origem, pois $f(0,0)$ não existe. Determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Para cada item onde a descontinuidade é removível, redefine a função f de modo que ela seja contínua na origem.*

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$;

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = (x+y)\text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$;

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$;

f) $f(x,y) = \dfrac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

g) $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y^2-y^4}{xy^3+y^4}$;

h) $f(x,y) = \dfrac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$.

Exercício 1.8.3 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g, h : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções tal que $f(g(P), h(P)) \in D$, para todo $P \in E$. Mostre que se g e h forem funções contínuas em A e f for contínua em $(g(A), h(A))$, então, a composta $f(g(A), h(A))$ será contínua em A.*

Exercício 1.8.4 *A função G é definida por*

$$G(x,y) = \begin{cases} x^2+4y^2 & \text{se} \quad x^2+4y^2 \neq 5 \\ 3 & \text{se} \quad x^2+4y^2 > 5 \end{cases}$$

Mostre que G é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, exceto aqueles sobre a elipse $x^2+4y^2 = 5$.