1.4 Conjuntos Enumeráveis

A noção de *Conjuntos Enumeráveis* está ligada a possibilidade de fazer um tipo de contagem dos elementos desses conjuntos, ou seja, a existência de uma relação biunívoca entre esse conjunto e o conjunto dos números naturais, como apresentado na definição a seguir.

Definição 1.4.1 *Um conjunto X é chamado de Enumerável quando ele é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Nesse caso, dizemos que f é uma Enumeração (ou uma Contagem) dos elementos de X.*

Seja X um conjunto enumerável e seja $f : \mathbb{N} \to X$ uma bijeção. Assim escrevendo $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ \cdots,\ f(n) = x_n,\ \cdots$, segue que o conjunto enumerável X pode ser reescrito na forma

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

Definição 1.4.2 *Uma Sequência é qualquer função $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.*

Exemplo 1.4.1 *a) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é enumerável.*

De fato: *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n$ é uma bijeção e, por isso, $\mathbb{N}$ é enumerável.* □

b) O conjunto dos números naturais pares $P = 2\mathbb{N}$ é enumerável (Exemplo 1.3.2).

c) O conjunto dos números naturais ímpares $I = \mathbb{N}\backslash 2\mathbb{N}$ é enumerável (Exemplo 1.3.2).

d) Qualquer sequência $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $S(n) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ é um conjunto enumerável.

e) O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável.

De fato: *Tome a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por*

$$f(n) = \begin{cases} (n+1)/2, & \text{se } \quad n \text{ for ímpar} \\ -n/2+1, & \text{se } \quad n \text{ for par} \end{cases}.$$

Então, f é uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ (prove) e, portanto, $\mathbb{Z}$ é enumerável. □

■

De uma forma mais geral, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4.1 *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Solução: Se $X \subset \mathbb{N}$ é finito, então, por definição, X é enumerável. Caso contrário, considere $x_1 \in A_1 = X$ o menor elemento do conjunto X, elemento esse que existe devido ao Princípio da Boa Ordenação. Agora, considere $x_2 \in A_2 = A_1 \setminus \{x_1\} = X \setminus \{x_1\}$ o menor elemento do conjunto A_2. Depois, considere $x_3 \in A_3 = A_2 \setminus \{x_2\} = X \setminus \{x_1, x_2\}$ o menor elemento do conjunto A_3 e assim por diante. Daí, de uma forma geral, considere

$$x_n \in A_{n-1} \setminus \{a_{n-1}\} = X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\},$$

o menor elemento de A_n. É importante observar que $A_n \neq \varnothing$, visto que X é infinito e, além disso, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$. Portanto, podemos reescrever X por $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.
De fato: Suponha que $X \neq \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Então, temos que existe algum $x \in X$ tal que $x \neq x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, temos que $x \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $x_i \leq x$, para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, temos que X é limitado e, segundo o Corolário 1.2.5, temos que X é finito, o que é uma contradição. □

Portanto, X é um conjunto enumerável, o que termina a demonstração do resultado. ■

Corolário 1.4.1 *Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y é enumerável, então, X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração: Como Y é enumerável, existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to Y$. Assim, do diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h=\varphi^{-1}\circ f"'] & Y \\ \mathbb{N} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

temos que $h = \varphi^{-1} \circ f : X \to h(X) \subset \mathbb{N}$ é uma bijeção, visto que h é a composição de duas funções injetivas definida sobre a sua imagem. Logo, segue do Teorema 1.4.1 que $h(X)$ é enumerável e, consequentemente, temos que X é enumerável. Em particular, se $X \subset Y$, considere $h : X \hookrightarrow Y$, dada por $h(x) = x$, para $x \in X$ (a função de inclusão), então, temos que $h : X \to h(X) \subset Y$ é uma bijeção e, consequentemente, X é enumerável. ■

Corolário 1.4.2 *Seja $g : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Se X é enumerável, então, Y também é.*

Demonstração: Defina uma função f da seguinte forma: como g é sobrejetiva, para cada $y \in Y$, escolha um $x = f(y) \in X$ tal que $y = g(x)$. Assim, temos uma aplicação $f : Y \to X$ tal que $g(f(y)) = y$, para todo $y \in Y$. Assim, temos que f está bem definida e, além disso, temos que f é injetiva. Então, segue do Corolário 1.4.1 que Y é enumerável. ■

Agora vamos mostrar que o produto cartesiano de conjuntos enumeráveis também é enumerável. Isso vai nos permitir mostrar que o conjunto dos *Números Racionais* $\mathbb{Q}$ também é enumerável.

Corolário 1.4.3 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é também um conjunto enumerável.*

Demonstração: Se X e Y são dois conjuntos enumeráveis, então, existem bijeções e, consequentemente, sobrejeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$. Daí, a função $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetiva. **De fato:** Para cada $(p, q) \in X \times Y$, temos que $p \in X$ e, por isso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = p$. Analogamente, para cada $(p, q) \in X \times Y$, temos que $q \in Y$ e, por isso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = q$. Assim, para cada $(p, q) \in X \times Y$, temos que existe $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\varphi(m, n) = (f(m), g(n)) = (p, q)$ e, por isso, φ é uma função sobrejetiva. $\square$

Do Corolário 1.4.2 temos que se $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ for um conjunto enumerável, sendo φ sobrejetiva, segue que $X \times Y$ é enumerável. Portanto, basta provarmos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

Para provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto enumerável, tome a função $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\phi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Assim, pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, temos que ϕ é injetiva e, consequentemente, do Corolário 1.4.1, segue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. $\blacksquare$

Uma consequência desse resultado é apresentada no exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.2 *O Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Solução: O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é o conjunto formado por todas as frações, ou seja, ele é dado por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Considere a função $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $\phi(m, n) = \dfrac{m}{n}$. Como a função ϕ é sobrejetiva e o domínio da ϕ é o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis (consequentemente enumerável), segue do Corolário 1.4.2 que $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável. $\blacksquare$

Observação 1.4.1 *Existem outras maneiras de mostrar que o conjunto dos números racionais é enumerável como, por exemplo, colocando todos as frações em fila. Para exemplificar uma forma de se fazer isso, vamos fazer uma lista com as frações positivas.*

O procedimento é descrito a seguir: Na primeira linha, escreva todas as frações de numerador igual a 1, na segunda linha, escreva todas as frações de numerador igual a 2, na terceira linha, escreva todas as frações de numerador igual a 3, e assim por diante. Ou seja, na n-ésima linha, escreva todas as frações de numerador igual a n. Dessa forma, todas as frações positivas estarão dispostas nessa tabela. Em zig-zag vai percorrendo por todas *as frações, como ilustrado no diagrama a seguir*

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \frac{1}{5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[dl] & \frac{3}{5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{4}{1} \arrow[d] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{4}{3} \arrow[dl] & \frac{4}{4} \arrow[ur] & \frac{4}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Retirando todas as frações de valores que já tenham aparecido na listagem, temos que todas as frações estão relacionadas com os números naturais, dessa forma, temos a seguinte listagem das frações

$$\left(1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots\right).$$

De maneira análoga, é possível contar os elementos do $\mathbb{Q}_-$ e, portanto, podemos conclui que $\mathbb{Q}$ é enumerável, visto que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$.

A ideia de produto cartesiano pode ser estendida a uma quantidade enumerável de conjuntos enumeráveis, como sugere o corolário a seguir. A demonstração desse resultado é feita por indução e é deixada como exercício.

Corolário 1.4.4 *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é também um conjunto enumerável.*

Demonstração: Exercício. ■

Dos resultados anteriores podemos chegar a uma pequena conclusão: "O enumerável é o menor dos infinitos".

Corolário 1.4.5 *Todo conjunto infinito possui um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração: Exercício. ■

A pergunta natural agora é: "Será que todo conjunto infinito é enumerável¿'. A resposta será dada com o exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.3 *Seja S o conjunto de todas as sequências da forma $s : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.*
***Afirmação**: Nenhum conjunto enumerável $X = (s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots) \subset S$ é igual a S.*
De fato: *Suponha que $X = S$. Daí, considere o elemento $s^* \in S$ dado por:*

- $s^*(1) = 0$, *se* $s_1(1) = 1$ *e* $s^*(1) = 1$, *caso contrário.*

- $s^*(2) = 0$, *se* $s_2(2) = 1$ *e* $s^*(2) = 1$, *caso contrário.*

- $s^*(3) = 0$, *se* $s_3(3) = 1$ *e* $s^*(3) = 1$, *caso contrário.*

- $\cdots$

- *Ou seja, considere que a* n*-ésima coordenada de* s^* *tenha valor diferente da* n*-ésima coordenada do elemento* s_n *da sequência* $X = (s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots) \subset S$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Logo, a sequência s^* *não é um elemento de* X, *visto que* $s^* \neq s_i$, *para todo* $s_i \subset X$. $\square$

Portanto, S *não pode ser um conjunto enumerável.*

$\blacksquare$

Vimos que existem conjuntos que não são enumeráveis. Esses conjuntos começaram a ser estudados no próximo capítulo. Agora, faça os exercícios relativos a esse capítulo. Não se esqueça de completar os detalhes que ficaram de exercício até aqui. Isso pode lhe ajudar muito. Bom trabalho.