1.23 Máximo e Mínimo de Funções reais de mais de uma variável

Uma importante aplicação da derivada de funções reais de uma variável real estava relacionada com o estudo de valores *Extremos* de funções. Agora, construiremos ideias semelhantes para funções reais de várias variáveis. Para isso, vamos as definições de *Extremos Globais*.

Definição 1.23.1 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um ponto de Máximo Global (ou de Máximo Absoluto) num disco $B(A, r)$, de centro $A \in D$ e raio $r > 0$, se existir um ponto $P \in B(A, r)$ tal que $f(P) \geq f(X)$, para todo $X \in B(A, r)$. Nesse caso, $f(P)$ é dito ser o Valor Máximo Global (ou o Valor Máximo Absoluto) de f em $B(A, r)$.*

Definição 1.23.2 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um ponto de Mínimo Global (ou de Mínimo Absoluto) num disco $B(A, r)$, de centro $A \in D$ e raio $r > 0$, se existir um ponto $P \in B(A, r)$ tal que $f(P) \leq f(X)$, para todo $X \in B(A, r)$. Nesse caso, $f(P)$ é dito ser o Valor Mínimo Global (ou o Valor Mínimo Absoluto) de f em $B(A, r)$.*

Definição 1.23.3 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um ponto Extremo Global (ou Extremo Absoluto) num disco $B(A, r)$, de centro $A \in D$ e raio $r > 0$, se f possuir um ponto de máximo global ou de mínimo global em $B(A, r)$.*

Veja alguns exemplos.

Exemplo 1.23.1

1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Então, como*

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

segue que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f em $\mathbb{R}^2$. Observe também que f não possui ponto de máximo absoluto em $\mathbb{R}^2$, visto que $\lim f(x, y) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ ou $y \to +\infty$.

2. *Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$. Então, como*

$$-1 \leq g(x, y) \leq 1, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

segue que -1 é o valor de mínimo global de g e 1 é um valor de máximo global de g em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.23.2 *Seja $h(x, y) = 2x - y$ e seja R o conjunto delimitado pelas condições $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq y$ e $x + y \leq 3$. Estude f com relação aos seus valores extremos em R.*

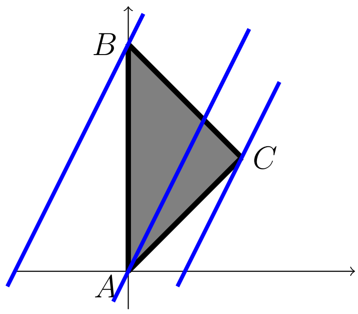

Figura 1.30: Representação do conjunto $R \cap D_f$ do Exemplo 1.23.2.

Solução: Analisemos o comportamento da função em relação as suas curvas de nível. Observe a Figura 1.23.
Considere as curvas de nível que passa por cada um dos vértices que define a região R, ou seja, que passa nos pontos $A = (0.0, 0.0)$, $B = (0.0, 3.0)$ e $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Dessa forma, como $f(A) = 0$, $f(B) = -3$ e $f(C) = 1.5$, segue que as curvas de nível ficam dadas por:

- a curva de nível que passa pelo ponto A: $2x - y = 0$;
- a curva de nível que passa pelo ponto B: $2x - y = -3$; e
- a curva de nível que passa pelo ponto C: $2x - y = \frac{3}{2}$.

Dessa forma, temos que as curvas de nível são retas paralelas que passam por cada um dos vértices. Mostremos que o ponto B é um ponto de mínimo global e que C é um ponto de máximo global.
De fato: Observe que:

$$f(x,y) - f(B) = (2x - y) - (-3) = 3x + (3 - x - y) \geq 0,$$

visto que $3x \geq 0$ e $3 - x - y \geq 0$, para todo $(x,y) \in R$. Portanto,

$$f(x,y) \geq f(B), \text{ para todo } (x,y) \in R.$$

Além disso, temos que

$$f(x,y) - f(C) = (2x - y) - \frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right) + (x - y) \leq 0,$$

visto que (da Figura 1.23) $x - \frac{3}{2} \leq 0$, já que $x \leq \frac{3}{2}$, $\forall\ (x,y) \in R$ e $x - y \leq 0$, para todo $(x,y) \in R$. Portanto,

$$f(x,y) \leq f(C), \text{ para todo } (x,y) \in R.$$

$\square$ $\blacksquare$

Definição 1.23.4 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possui um valor Máximo Local (ou Máximo Relativo) no ponto $A \in D$, se existir um disco aberto $B(A,r)$, de centro A e raio $r > 0$, tal que $f(A) \geq f(X)$, para todo $X \in B(A,r)$.*

Definição 1.23.5 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possui um valor Mínimo Local (ou Mínimo Relativo) no ponto $A \in D$, se existir um disco aberto $B(A, r)$, de centro A e raio $r > 0$, tal que $f(A) \leq f(X)$, para todo $X \in B(A, r)$.*

Definição 1.23.6 *Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possui um valor Extremo Local (ou Extremo Relativo) num ponto $A \in D$ se f possuir um valor máximo local ou um valor mínimo local em A.*

De um modo simples, observe que um ponto é considerado extremo global se ele for extremo comparado a todos os pontos do domínio e um ponto é considerado extremo local se for possível definir uma região em torno do ponto onde ele é um extremo. Assim, todo ponto extremo global também é um extremo local, mas a recíproca não é verdadeira.
Agora, vamos apresentar uma condição necessária para um ponto ser extremo local de uma função.

Teorema 1.23.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função que existe em todos os pontos de um disco aberto $B(A, r) \subset D$, de centro A e raio $r > 0$, com f tendo um ponto extremo relativo em $A \in D$. Assim, se as derivadas parciais $f_{x_i}(A)$ existem, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então, teremos que $f_{x_i}(A) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Demonstração: Provemos o teorema para o caso $n = 2$. Suponhamos que f tenha um ponto máximo relativo em A. Da definição de derivada parcial de f em relação a x no ponto $A = (a, b)$, temos que

$$f_x(A) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Como A é um ponto de máximo relativo, segue que $f(x, b) - f(a, b) \leq 0$, para todo $(x, b) \in B(A, r)$. Dessa forma, tomando $x \to a^+$, segue que $x - a > 0$ e, consequentemente,

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \leq 0 \Rightarrow f_x(A) = f_x^+(A) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \leq 0.$$

Por outro lado, tomando $x \to a^-$, segue que $x - a < 0$ e, consequentemente,

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \geq 0 \Rightarrow f_x(A) = f_x^-(A) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \geq 0.$$

Portanto, como $0 \leq f_x(A) \leq 0$, temos que $f_x(A) = 0$. O Caso onde $f_y(A) = 0$ é semelhante e, por isso, é deixado de exercício. ■

Agora podemos definir o que chamaremos de *Ponto Crítico*.

Definição 1.23.7 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f_{x_i}(A)$ existe, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Nessas condições, se $f_{x_i}(A) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então, dizemos que A é um Ponto Crítico de f.*

Observação 1.23.1 *a) Uma forma de reescrever a definição de ponto crítico é dizer que um ponto $A \in D_f$ é um ponto crítico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se $\nabla f(A) = (0, \cdots, 0)$, quando o gradiente existe.*

b) O Teorema 1.23.1 estabelece uma condição necessária para que um ponto crítico seja o extremo relativo de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mas essa condição não é suficiente.

c) É possível que uma função tenha um extremo local num ponto onde pelo menos uma das derivadas parciais não existe.

d) As derivadas parciais primeiras de uma função valerem zero não é uma condição suficiente para que a função tenha um extremo local nesse ponto, pois podem existir os Pontos de Sela (Ver Exemplo 1.23.3).

e) O Teorema 1.23.1 nos diz que se $A \in \mathring{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ (A está no interior de D_f), então, se A é um é um extremo local de f, segue que o plano tangente ao gráfico de f em A, passando pelo ponto $f(A)$, é paralelo ao plano XY.

f) Se $A \in D_f \setminus \mathring{D}_f$, então, o Teorema 1.23.1 não pode ser aplicado e, por isso, esses pontos precisam ser analisados separadamente.

Exemplo 1.23.3 *Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$, verifique se f possui algum ponto extremo local.*

Solução: Observe a Figura 1.31.

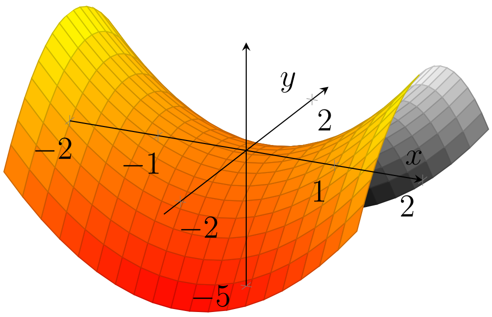

Figura 1.31: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.3.

Como f é uma função polinomial, consequentemente, as suas derivadas parciais também são, segue que f, f_x e f_y existem, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo que $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = -2y$.
Como $f_x(x, y) = 0$, se $x = 0$, e $f_y(x, y) = 0$, se $y = 0$, segue que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se, $(x, y) = (0, 0)$.
Temos que para pontos da forma $(x, 0)$ a função assume valores positivos, visto que $f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$. Por outro lado, para pontos da forma $(0, y)$ a função assume valores negativos, visto que $f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0)$. Portanto, a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ não possui pontos extremos em $\mathbb{R}^2$, visto que o seu único ponto crítico não é ponto extremo (visto que $f(0, y) \leq f(0, 0) \leq f(x, 0)$).

Analisando o gráfico desse hiperboloide, dado pela Figura 1.31, também podemos observar que a origem não é um extremo da função f, visto que ele tem forma de sela em pontos próximos à origem. ■

Exemplo 1.23.4 *Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Verifique se f possui algum ponto extremo local.*

Solução: Observe a Figura 1.32.

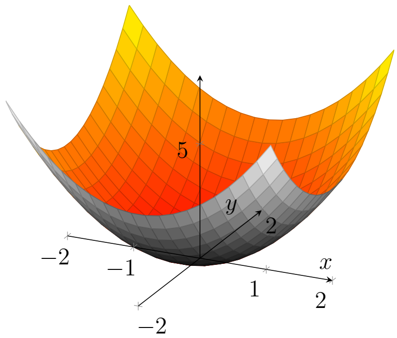

Figura 1.32: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.4.

Como f é uma função polinomial, consequentemente, as suas derivadas parciais também são, segue que f, f_x e f_y existem, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo que $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = 2y$, logo o Teorema 1.23.1 é aplicável.
Temos que $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Logo, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f em $\mathbb{R}^2$.
Como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, segue que $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$, ou seja, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo de f em $\mathbb{R}^2$. Portanto, $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local de f e $f(0, 0) = 0$ é o valor mínimo local de f em $\mathbb{R}^2$.
Para visualizar graficamente, uma ilustração do gráfico da equação $z = x^2 + y^2$é dado na Figura 1.32. Essa ilustração é de um paraboloide cujo eixo vertical passa pelo ponto $(0, 0, 0)$ e tem concavidade voltada para cima. ■

Exemplo 1.23.5 *Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$, determine se f tem algum ponto extremo local.*

Solução: Observe a Figura 1.33.

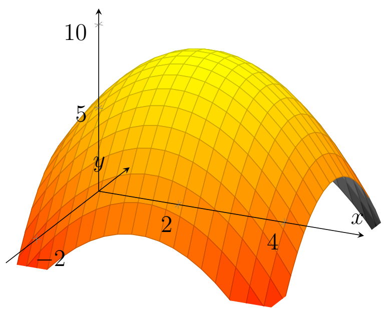

Figura 1.33: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.5.

Como f é uma função polinomial, consequentemente, as suas derivadas parciais também são, segue que f, f_x e f_y existem, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo que $f_x(x, y) = 6-2x$ e $f_y(x, y) = -4-4y$. Logo, o Teorema 1.23.1 é aplicável. Temos que $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ e $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -1$. Logo, $(3, -1)$ é o único ponto crítico de f.
Observe que $f(3, -1) = 11$. Além disso, temos que

$$\left.\begin{array}{c}(x-3)^2 \geq 0 \\ (y-(-1))^2 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}x^2-6x+9 \geq 0 \\ y^2+2y+1 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}9 \geq 6x - x^2 \\ 1 \geq -2y-1y^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c}9 \geq 6x - x^2 \\ 2 \geq -4y-2y^2\end{array}\right\} \Rightarrow 9+2 \geq (6x-x^2)+(-4y-2y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3,-1) = 11 \geq 6x-4y-x^2-y^2 = f(x,y).$$

Portanto, $(3, -1)$ é um ponto de máximo local de f e $f(3, -1) = 11$ é o valor máximo local de f em $\mathbb{R}^2$.
O gráfico da equação $z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$, ilustrado na Figura 1.33, é um paraboloide cujo eixo vertical passa pelo ponto $(3, -1, 11)$ e tem concavidade voltada para baixo. ■

É importante ressaltar que o Teorema 1.23.1 só pode ser aplicado a pontos interiores ao domínio da função. Pontos de fronteira precisam ser analisados separadamente, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.23.6 *Dada a função $f : [0, +\infty[\times[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2y + 3x$, determine se f possui algum ponto extremo local.*

Solução: Como f é uma função polinomial, consequentemente, as suas derivadas parciais também são, segue que f, f_x e f_y existem, para todo $(x, y) \in D_f$. Além disso, temos que

$$f_x(x, y) = 2xy + 3 \text{ e } f_y(x, y) = x^2.$$

Como $x, y \geq 0$, segue que $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in D_f$ e, por isso, $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto de mínimo de f em D_f.
Temos também que $f_x(x, y) \geq 3 \neq 0$, para todo $(x, y) \in D_f$. Porém, esse fato não contraria as hipóteses do Teorema 1.23.1, visto que $(0, 0)$ não está no interior do D_f. O gráfico da equação $z = x^2y + 3x$ é ilustrado na Figura 1.34.

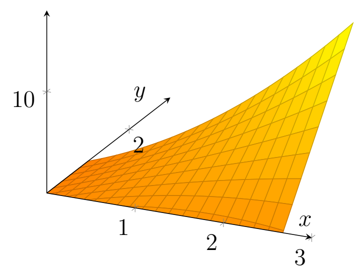

Figura 1.34: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.6.

Portanto, o único extremo local de f é o ponto de mínimo local $(0,0)$ na fronteira do D_f. ■

Vamos agora buscar um resultado que nos auxilie a definir se um determinado ponto é, ou não, extremo de uma determinada função de uma maneira mais simples, como os testes da primeira e da segunda derivada no cálculo para funções reais de uma variável real. Para isso, vamos a uma definição.

Definição 1.23.8 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Então, a função H dada por*

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

é chamada de Hessiano de f.

Observação 1.23.2 *Repare que, sendo f de classe C^2, segue que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ e, por isso, a matriz que define o hessiano, chamada de Matriz Hessiana é simétrica. Consequentemente, o hessiano de uma função de duas variáveis pode ser reescrito por*

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 .$$

De uma forma geral, temos a seguinte definição.

Definição 1.23.9 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$. Então, a Matriz Hessiana de f, denotada por $\mathcal{H}$, é a matriz dada por*

$$\mathcal{H}[f(X)] = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(X) & f_{x_1x_2}(X) & \cdots & f_{x_1x_n}(X) \\ f_{x_2x_1}(X) & f_{x_2x_2}(X) & \cdots & f_{x_2x_n}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(X) & f_{x_nx_2}(X) & \cdots & f_{x_nx_n}(X) \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos ao teorema que nos dará condições suficientes para verificar se um determinado ponto crítico, de uma função real de duas variáveis reais, é um extremo local.

Teorema 1.23.2 ***Teste da Derivação Segunda:*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 num disco aberto $B(A,r)$, de centro $A = (a,b)$ e raio $r > 0$. Então:*

1. *f tem um valor mínimo relativo em A se $H(A) > 0$ e $f_{xx}(A) > 0$;*
2. *f tem um valor máximo relativo em A se $H(A) > 0$ e $f_{xx}(A) < 0$;*
3. *f tem um ponto de sela em A se $H(A) < 0$;*
4. *não se tira conclusão sobre ser ótimo, quando $H(A) = 0$.*

Demonstração: A demonstração desse teorema não será feita nessas notas. ■

Vamos a algumas aplicações.

Exemplo 1.23.7 *Dado a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$, determine os pontos extremos relativos de f, se existirem.*

Solução: Como $f_x(x, y) = 8x^3 - 2x$ e $f_y(x, y) = 2y - 2$, segue que os pontos críticos de f são obtidos quando $x = 0$, ou $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$; e quando $y = 1$. Portanto, os pontos críticos de f são:

$$A = \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \; B = (0, 1) \text{ e } C = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Para aplicar o Teorema 1.23.2, como $f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2$, $f_{xy}(x, y) = 0 = f_{yx}(x, y) = 0$ e $f_{yy}(x, y) = 2$, para o ponto $A = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, temos que:

- $f_{xx}(A) = 24\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4$;
- $f_{yy}(A) = 2$;
- $f_{xy}(A) = 0$.

Então, $H(A) = f_{xx}(A).f_{yy}(A) - f_{xy}(A)^2 = 8 > 0$ e, tendo que $f_{xx}(A) = 4 > 0$, segue do teste da derivação segunda (Teorema 1.23.2) que $A = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ é um ponto de mínimo relativo.
Para $B = (0, 1)$, temos que

- $f_{xx}(B) = 24(0)^2 - 2 = -2$;
- $f_{yy}(B) = 2$;
- $f_{xy}(B) = 0$;

e, por isso, como $H(B) = f_{xx}(B).f_{yy}(B) - f_{xy}(B)^2 = -4 < 0$, segue do teste da derivação segunda (Teorema 1.23.2) que $B = (0, 1)$ é um ponto de sela.
Por fim, para $C = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, temos que:

- $f_{xx}(C) = 24\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4$;
- $f_{yy}(C) = 2$;
- $f_{xy}(C) = 0$;

assim, como $H(C) = f_{xx}(C).f_{yy}(C) - f_{xy}(C)^2 = 8 > 0$, e $f_{xx}(C) = 4 > 0$, segue teste da derivação segunda (Teorema 1.23.2) que $C = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ é um ponto de mínimo relativo.
Uma representação do gráfico da função f é dada pela Figura 1.35.
Portanto, f possui valor mínimo local de $-\dfrac{9}{8}$, nos pontos $A = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ e $C = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. ■

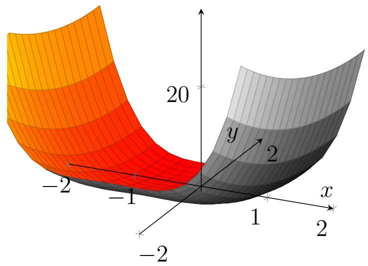

Figura 1.35: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.7.

Exemplo 1.23.8 *Dado a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$, determine os pontos extremos relativos de f, se eles existirem.*

Solução: Como f é uma função polinomial, segue que f é de classe C^∞. Assim, os pontos críticos de f são obtidos quando $\nabla f(x,y) = 0$, ou seja, quando

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2 - 3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{array}\right\}.$$

Dessa forma, temos que os pontos críticos de f são os pontos:

$$A = (-1,-1), \; B = (-1,1), \; C = (1,-1) \text{ e } D = (1,1).$$

Além disso, como $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{yy}(x,y) = 6y$ e $f_{xy}(x,y) = 0$, temos que

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy, \; \forall \; (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dessa forma, temos que:

- $H(A) = 36 > 0$ e $f_{xx}(A) = -6 < 0 \Rightarrow A$ é um ponto de máximo local;
- $H(B) = -36 < 0 \Rightarrow B$ é um ponto de sela;
- $H(C) = -36 < 0 \Rightarrow C$ é um ponto de sela;
- $H(D) = 36 > 0$ e $f_{xx}(A) = 6 > 0 \Rightarrow D$ é um ponto de mínimo local.

■

Exemplo 1.23.9 *Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular, sem tampa, tendo um volume específico, se desejamos usar a menor quantidade de material em sua confecção.*

Solução: Considere uma caixa como a apresentada na Figura 1.36, sendo

- x = o número de unidades do comprimento da caixa;
- y = o número de unidades da profundidade da caixa;

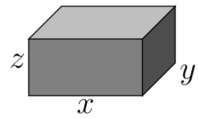

Figura 1.36: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.9.

- $z =$ o número de unidades da altura da caixa;
- $S =$ o número de unidades quadradas da área da superfície da caixa;
- $V =$ o número de unidades cúbicas do volume da caixa (V constante);

x, y e z estão no intervalo $(0, +\infty)$. Portanto, o valor mínimo absoluto de S está entre os valores mínimos relativos de S. Considere as equações:

- Área total: $S = xy + 2yz + 2xz$;
- Volume: $V = xyz$.

Resolvendo a segunda equação para z em termos das variáveis x e y e a constante V, temos que $z = \dfrac{V}{xy}$, e substituindo na primeira equação, chegamos a:

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Encontrando as derivadas parciais, primeiras e segundas, dessa equação obtemos:

- $\dfrac{\partial S}{\partial x} = y - \dfrac{2V}{x^2}$;
- $\dfrac{\partial S}{\partial y} = x - \dfrac{2V}{y^2}$;
- $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \dfrac{4V}{x^3}$;
- $\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \dfrac{4V}{y^3}$ e
- $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1$.

Os pontos críticos de S são obtidos quando $x^2y - 2V = 0$ e $xy^2 - 2V = 0$ e, por isso, temos que $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Para estes valores de x e y, temos que

$$\mathcal{H}(A) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 > 0.$$

Assim, do Teorema 1.23.9, segue que S tem um valor mínimo relativo quando $x = y = \sqrt[3]{2V}$. Como $z = \dfrac{V}{xy}$, segue que $z = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. Portanto, a caixa de mesmo volume V que utiliza a menor quantidade de material para ser confeccionada tem base quadrada e altura igual a metade do comprimento da base. ■

Exemplo 1.23.10 *Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo retangular de* $1m^3$ *de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que vai ser utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.*

Solução: Considere uma caixa como no Exemplo 1.23.9. Dessa forma,a função custo do material, denotada por C, ficada dada por

$$C = 1(xy) + 3\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right).$$

Os pontos críticos de C são obtidos quando $y - \dfrac{6}{x^2} = 0$ e $x - \dfrac{6}{y^2} = 0$ e, por isso, temos que

$$x^2y = 6 = xy^2 \Rightarrow x = y = \sqrt[3]{6}.$$

Portanto, o único ponto crítico de C é o ponto $A = (\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$. Para esse ponto crítico, temos que

$$\mathcal{H}(A) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{12}{x^3} + \frac{12}{x^3} - 1 > 0$$

e, por isso, sendo $f_{xx} = 2 > 0$, segue que A é ponto de mínimo de C procurado. ■

Observação 1.23.3 *a) Essa discussão de pontos extremos pode ser estendida para funções reais de n variáveis.*

b) Um ponto crítico numa função de duas variáveis é encontrado igualando as duas derivadas parciais f_x e f_y a zero e resolvendo o sistema para encontrar o valor das duas incógnitas. Para uma função de n variáveis o sistema terá n equações (formada pelas n derivadas parciais igualadas a zero) e n incógnitas.

c) No Exemplo 1.23.9 procuramos o mínimo da função $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, sujeitos à condições que x, y e z satisfaçam a condição $V = xyz$. No Exemplo 1.23.7 procuramos extremos relativos de f para o qual $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.

Esses dois exemplos são distintos, porque no primeiro caso temos uma condição adicional, chamada de uma Restrição (ou Condição Lateral). Problemas com restrições são chamados de Problemas Condicionados ou Problemas Restritos e, os extremos encontrados para esses problemas são chamados de Extremos Condicionados, enquanto que nos Problemas Irrestritos encontramos os Extremos Livres.

Alguns problemas podem, ou não, possuírem extremos absolutos. Porém, se a função for definida numa bola fechada e limitada sempre é possível garantir que a função assume valores máximos e mínimos absolutos nessa bola. Esse teorema é conhecido como Teorema de Weierstrass, como enunciaremos a seguir.

Teorema 1.23.3 ***(Teorema de Weierstrass:)*** *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em todos os pontos de algum conjunto compacto D. Então, existe, no mínimo, um ponto em B_1, onde f assume valor máximo absoluto e, no mínimo, um ponto em B_2 onde f assume um valor mínimo absoluto.*

Demonstração: Será omitida. ■

Vamos a algumas aplicações.

Exemplo 1.23.11 *Determine os extremos absolutos da função* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$*, sujeito a* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$.

Solução: A função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ é uma função polinomial e, por isso, ela existe para todo $(x,y) \in R$. Os pontos críticos de f são obtidos de $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{array} \right. .$$

Portanto, os pontos críticos de f são dados por $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ e $(1,1)$. Como $(-1,-1) \notin R$ e $(-1,1) \notin R$, os únicos pontos críticos de f no interior de R são os pontos

$$A = (1,-1) \text{ e } B = (1,1).$$

Agora, analisemos os pontos da fronteira. Observe a região R, apresentada na Figura 1.37.

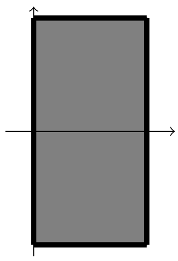

Figura 1.37: Representação do conjunto $R \cap D_f$ do Exemplo 1.23.11.

Temos quatro regiões que precisam ser analisadas, ou seja, cada um dos segmentos de retas que formam a fronteira, que são dados por:

I. $x = 0$ e $-2 \leq y \leq 2$;

II. $x = 2$ e $-2 \leq y \leq 2$;

III. $y = -2$ e $0 \leq x \leq 2$;

IV. $y = 2$ e $0 \leq x \leq 2$.

Façamos a análise de cada um desses segmentos em separado. Assim,

I. Como $x = 0$ nesse segmento, podemos considerar a função $h_1(y) = f(0,y) = y^3 - 3y$. Assim, $h_1'(y) = 3y^2 - 3$ e, consequentemente, os pontos críticos de h_1 são obtidos com $x = 0$, $y = 1$ e $y = -1$, ou seja, são os pontos $C = (0,1)$ e $D = (0,-1)$. Além disso, é preciso considerar os pontos de fronteira $E = (0,-2)$ e $F = (0,2)$ na análise de extremos do segmento de reta $\overline{EF}$.

II. Como $x = 2$ nesse segmento, podemos considerar a função $h_2(y) = f(2,y) = y^3 - 3y + 2$. Assim, $h_2'(y) = 3y^2 - 3$ e, consequentemente, os pontos críticos de h_2 são obtidos com $x = 2$, $y = 1$ e $y = -1$, ou seja, são os pontos $G = (2,1)$ e $H = (2,-1)$. Além disso, é preciso considerar os pontos de fronteira $I = (2,-2)$ e $J = (2,2)$ na análise de extremos do segmento de reta $\overline{IJ}$.

III. Para o segmento $\overline{EI}$, só precisamos analisar os pontos interiores do segmento, visto que os extremos já foram considerados nos casos anteriores. Daí, como $y = -2$, considere a função $g_1(x) = f(x, -2) = x^3 - 3x - 2$. Assim, $g_1'(x) = 3x^2 - 3$ e, consequentemente, os pontos críticos de g_1 ocorre quando $x = 1$ e $y = -2$, ou seja, é o ponto $K = (1, -2)$.

IV. Para o segmento $\overline{FJ}$, só precisamos analisar os pontos interiores do segmento, visto que os extremos já foram considerados nos casos anteriores. Daí, como $y = 2$, considere a função $g_2(x) = f(x, 2) = x^3 - 3x + 2$. Assim, $g_2'(x) = 3x^2 - 3$ e, consequentemente, os pontos críticos de g_2 ocorre em $x = 1$ e $y = 2$, ou seja, é o ponto $L = (1, 2)$.

Como $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$, segue que os candidatos a extremo da função f são:

- $f(A) = f(1, -1) = 0;$
- $f(B) = f(1, 1) = -4;$
- $f(C) = f(0, 1) = -2;$
- $f(D) = f(0, -1) = 2;$
- $f(E) = f(0, -2) = -2;$
- $f(F) = f(0, 2) = 2;$
- $f(G) = f(2, 1) = 0;$
- $f(H) = f(2, -1) = 4;$
- $f(I) = f(2, -2) = 0;$
- $f(J) = f(2, 2) = 4;$
- $f(K) = f(1, -2) = -4;$
- $f(L) = f(1, 2) = 0;$

Portanto, como f é contínua e R é um conjunto compacto, segue que Teorema de Weierstrass que a função assume valor máximo e mínimo absoluto em R. Como 4 é o maior valor que a função f assume em R, segue que f assume valor máximo absoluto nos pontos H e J. Além disso, como -4 é o menor valor que a função assume em R, segue que f assume valor mínimo nos pontos B e K.
Uma representação do gráfico da função f, sujeita a região R, é dada pela Figura 1.38. ■

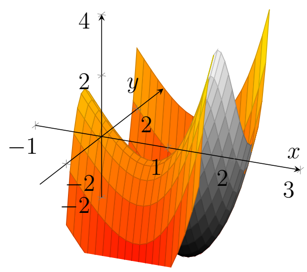

Figura 1.38: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.11.

Exemplo 1.23.12 *Uma empresa fabrica dois tipos de lâmpadas. Os fabricantes determinaram que se x lâmpadas dos primeiro tipo e y lâmpadas do segundo tipo forem fabricadas, cada uma delas poderá ser vendida pelos valores $(100 - 2x)$ e $(125 - 3y)$, respectivamente. O custo de fabricação de x*

lâmpadas do primeiro tipo e y *lâmpadas do segundo tipo é de* $(12x+11y+4xy)$. *Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que ele obtenha o lucro máximo?*

Solução: O valor obtido com a venda de qualquer mercadoria é dado pelo produto da quantidade vendida com o valor de venda. Dessa forma, para lâmpadas do primeiro tipo o valor recebido pela venda é $x(100-2x)$, enquanto que o valor obtido com a venda das lâmpadas do segundo tipo é $y(125-3y)$.
Assim, se $f(x,y)$ for o lucro pela venda dos dois tipos de lâmpadas, como o lucro é dado pelo valor recebido menos o custo, temos que

$$f(x,y) = x(100-2x)+y(125-3y)-(12x+11y+4xy) =$$

$$= -2x^2-3y^2+88x+114y-4xy.$$

Além disso, como x e y representam o número de lâmpadas, é natural supor que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Além disso, como o valor de venda não pode ser negativo, segue que $(100-2x) \geq 0$ e $(125-3y) \geq 0$, ou seja, $x \leq 50$ e $y \leq \dfrac{125}{3}$.
Portanto, a região de busca R, que é um conjunto compacto, fica dada por

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 50 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{125}{3}\right\}.$$

Uma ilustração da região R é apresentada na Figura 1.23.

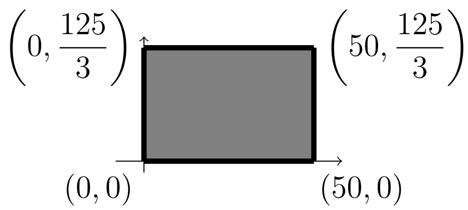

Figura 1.39: Representação do conjunto $R \cap D_f$ do Exemplo 1.23.12.

Encontremos os pontos críticos de f no interior da região R. Para isso,

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+88-4y=0 \\ -6y+114-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=22-x \\ 3y=57-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13 \\ x=9 \end{cases}$$

Portanto, o único ponto crítico no interior de R é o ponto $A=(9,13)$. Agora, analisemos os pontos de fronteira, dados por

I. $x=0$ e $0 \leq y \leq \dfrac{125}{3}$;

II. $x=50$ e $0 \leq y \leq \dfrac{125}{3}$;

III. $y=0$ e $0 \leq x \leq 50$;

IV. $y=\dfrac{125}{3}$ e $0 \leq x \leq 50$.

Analisemos cada um dos casos em separado.

I. Considere a função $h_1(y) = f(0, y) = -3y^2 + 114y$. Assim, $h_1'(y) = -6y + 114$ e, consequentemente, o ponto crítico de h_1 é o ponto $B = (0, 19)$, com pontos de fronteira $C = (0, 0)$ e $D = \left(0, \dfrac{125}{3}\right)$.

II. Considere a função $h_2(y) = f(50, y) = -3y^2 - 86y - 600$. Assim, $h_2'(y) = -6y - 86$ e, consequentemente, o ponto crítico de h_2 é o ponto $E = \left(50, -\dfrac{43}{3}\right) \notin R$.

III. Considere a função $g_2(x) = f(x, 0) = -2x^2 + 88x$. Assim, $g_2'(x) = -4x + 88$ e, consequentemente, o ponto crítico de g_2 ocorre no ponto $F = (22, 0)$, com pontos de fronteira $G = (50, 0)$ e $H = \left(50, \dfrac{125}{3}\right)$.

IV. Por fim, considere a função $g_2(x) = f\left(x, \dfrac{125}{3}\right) = -2x^2 - \dfrac{236x}{3} - \dfrac{1375}{3}$. Assim, $g_2'(x) = -4x - \dfrac{236x}{3}$ e, consequentemente, o ponto crítico de g ocorre em $I = \left(-\dfrac{59}{3}, \dfrac{125}{3}\right) \notin R$.

Assim, como $f(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 88x + 114y - 4xy$, temos que os candidatos a ponto críticos assumem os seguintes valores:

- $f(A) = f(9, 13) = 1137$;
- $f(B) = f(0, 19) = 1083$;
- $f(C) = f(0, 0) = 0$;
- $f(D) = f\left(0, \dfrac{125}{3}\right) = -\dfrac{1375}{3}$;
- $f(F) = f(22, 0) = 968$;
- $f(G) = f(50, 0) = -600$;
- $f(H) = f\left(50, \dfrac{125}{3}\right) = -\dfrac{28175}{3}$.

Portanto, a quantidade de lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que ele obtenha o lucro máximo é $x = 9$ e $y = 13$, sendo que o valor do lucro máximo será de 1137 unidades monetárias.
Uma representação do gráfico da função f, sujeita a região R, é dada pela Figura 1.40. ■

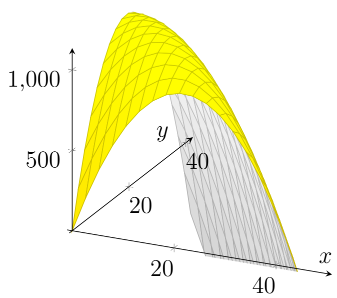

Figura 1.40: Representação do gráfico da função do Exemplo 1.23.12.

Exemplo 1.23.13 *(**Método dos Mínimos Quadrados**): Suponha que se deseje obter uma reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos dados, digamos*

$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}.$$

O que se deseja é encontrar uma reta que nos indique uma relação $f(x) = y$, para que seja possível fazer "estimativas" para valores de y em função do valor de X de pontos não conhecidos.
Uma reta r é dada pela expressão $y = ax+b$. Para cada ponto $P_i = (x_i, y_i) \in S$ é possível calcular a distância d_i vertical do ponto P_i a reta r, onde $d_i = y_i - y$, ou seja, $d_i = y_i - (ax_i + b)$. Observe que d_i pode ser visto como sendo o Erro (ou o Desvio) entre o ponto P_i a reta r. Assim, a soma dos quadrados dos desvios fica dada por

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2,$$

onde a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(d_i)^2$ é sempre um número não negativo e, além disso, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(d_i)^2 = 0$ se $P_i \in r$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Tomemos a reta para o qual $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(d_i)^2$ é mínimo absoluto. Essa reta é chamada de Reta de Regressão e o processo de encontrar essa reta é chamado de MMQ - Método dos Mínimos Quadrados.
Para encontrarmos essa reta de regressão, observe que conhecemos x_i e y_i, que são constante, e na reta $y = ax + b$, a e b que serão as nossas variáveis. Assim, vamos definir uma função

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(d_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2.$$

Assim, como

$$F_a(a, b) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}\left(y_i - ax_i - b\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}2\left(y_i - (ax_i + b)\right)(-x_i) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i - x_iy_i\right) = 2\left[a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right]$$

e

$$F_b(a, b) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}\left(y_i - ax_i - b\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}2\left(y_i - (ax_i + b)\right)(-1) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 2\left[a\sum_{i=1}^{n}x_i + b\sum_{i=1}^{n}1 - \sum_{i=1}^{n}y_i\right] =$$

$$= 2\left[a\sum_{i=1}^{n}x_i + bn - \sum_{i=1}^{n}y_i\right],$$

segue que

$$\left\{\begin{array}{l} F_a(a,b)=0 \\ F_b(a,b)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2\left[a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right]=0 \\ 2\left[a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn-\sum_{i=1}^{n}y_i\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{array}\right. .$$

Da segunda equação temos que

$$b=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i\right].$$

Substituindo na primeira equação chegamos a

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

Como F é de classe C^2 e como

$$F_{aa}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0,\ \ F_{bb}(a,b)=n \text{ e } F_{ab}(a,b)=\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

segue que

$$F_{aa}(a,b)F_{bb}(a,b)-F_{ab}(a,b)F_{ab}(a,b)=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2>0$$

como será mostrado no Capítulo **??**. *Dessa forma, F possui um ponto de mínimo, que é dado pelo seu único ponto crítico. Portanto, a reta que apresenta o menor desvio em relação ao conjunto de pontos S é a reta $r: y=ax+b$, com*

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \text{ e } b=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i\right].$$

Agora, chegamos aos *Multiplicadores de Lagrange*. Para resolver o problema do Exemplo 1.23.9, lembremos que encontramos uma função f dada por $f(x,y)$, encontrando uma expressão para z na função de restrição $V = xyz$ e substituindo essa expressão na função da área. Outra maneira de resolver esse tipo de problema foi apresentado por Joseph Lagrange, e é conhecido por *O Método dos Multiplicadores de Lagrange*. A teoria que resulta este método envolve teoremas conhecido como Teorema da Função Implícita, que estudaremos nas próximas seções.

Teorema 1.23.4 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num conjunto aberto A e seja $B = \{P \in A; g(P) = 0\}$, onde g é uma função de classe C^1 em A e $\nabla g(P) \neq 0$, para todo $P \in B$. Uma condição necessária para que $P_0 \in B$ seja um extremo local de f, em B, é que exista um número real λ_0, tal que*

$$\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla g(P_0).$$

Demonstração: Não será feito. ■

O teorema que descreve o método dos multiplicadores de Lagrange nos diz basicamente que: suponha que desejamos encontrar os pontos críticos de uma função f de três variáveis x, y e z, sujeitas à restrição $g(x,y,z) = 0$. Então, devemos introduzir uma nova variável, que vamos denotar por λ, e formar uma nova função auxiliar F de quatro variáveis definida por

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z).$$

Assim, o novo problema a ser resolvido é o de encontrar os pontos críticos da função F.

Exemplo 1.23.14 *Determine se a função $f(x,y) = 3x+2y$ possui extremos com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.*

Solução: Como $f(x,y) = 3x + 2y$ e a restrição g é dada por $0 = g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, tome a função F dada por

$$F(x,y,\lambda) = 3x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Assim, temos que as derivadas parciais de F ficam dada dor

- $0 = F_x(x,y,\lambda) = 3 + 2x\lambda$;
- $0 = F_y(x,y,\lambda) = 2 + 2y\lambda$;
- $0 = F_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1$;

Assim, da primeira equação temos que $x = -\dfrac{3}{2\lambda}$; da segunda equação temos que $y = -\dfrac{1}{\lambda}$; e, por isso, da terceira equação temos

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Consequentemente, temos que

$$P_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \text{ e } P_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right),$$

são os candidatos a extremos de f sujeitos a g em $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; g(P) = 0\}$, que é um conjunto compacto. Dessa forma, como $f(P_2) < 0 < f(P_1)$, segue que P_1 é um ponto de máximo absoluto de f em R e P_2 é um ponto de mínimo absoluto de f em R. ■

Exemplo 1.23.15 *Resolva o Exemplo 1.23.9 pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange.*

Solução: Usando as variáveis x, y e z e a constante V, como definida na solução do Exemplo 1.23.9, temos que

$$S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \text{ sujeito a } V = xyz.$$

Como desejamos minimizar a função f, sujeita a condição que $g(x,y,z) = 0$, segue que a nova função a ser analisada fica dada por

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V).$$

Obtendo as quatro derivadas parciais de F e igualando a zero para obter os pontos críticos, temos que:

(I) $F_x(x,y,z,\lambda) = y + 2z + yz\lambda = 0$;

(II) $F_y(x,y,z,\lambda) = x + 2z + xz\lambda = 0$;

(III) $F_z(x,y,z,\lambda) = 2x + 2y + xy\lambda = 0$;

(IV) $F_\lambda(x,y,z,\lambda) = xyz - V = 0$;

Assim, fazendo $(II) - (I)$, obtemos

$$(y - x) + \lambda z(y - x) = 0 \Rightarrow (y - x)(1 + z\lambda) = 0 \Rightarrow x = y \text{ ou } \lambda = -\frac{1}{z}.$$

CASO 1 - $x = y$: Substituindo em (III), chegamos a

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0 \Rightarrow x(4 + \lambda x) = 0 \Rightarrow \text{ como } x \neq 0, \text{ segue que } \lambda = -\frac{4}{x}.$$

Da equação (IV), temos que $z = \dfrac{V}{x^2}$, substituindo em (I) chegamos a

$$x + \frac{2V}{x^2} + x\frac{V}{x^2}\left(-\frac{4}{x}\right) = 0 \Rightarrow x^3 + 2V - 4V = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}.$$

Consequentemente, temos que $y = \sqrt[3]{2V}$ e $z = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, que coincide com o resultado obtido no Exemplo 1.23.9.

CASO 2 - $\lambda = -\dfrac{1}{z}$: Para esse caso, usando (I) temos que $z = 0$, o que não pode ocorrer, visto que $x, y, z > 0$. Portanto, F só possui um ponto crítico. Como

$$S(1,1,V) = 1 + 4V \geq 2\sqrt[3]{4V^2} = S\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}\right),$$

segue que S possui um valor mínimo no ponto crítico $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}\right)$.

■

Se muitas condições são impostas, o método dos Multiplicadores de Lagrange pode ser estendido com vários multiplicadores. Em particular, se deseja encontrar pontos críticos de uma função tendo valores funcionais $f(x,y,z)$ sujeitos as restrições $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$ encontramos os pontos críticos da função F de cinco variáveis x, y, z, λ e μ, tal que

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z).$$

Exemplo 1.23.16 *Encontre os extremos relativos da função f sabendo que $f(x,y,z) = xz + yz$ e o ponto (x,y,z) está situado na intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = 2$ e $yz = 2$.*

Solução: Seja F a função de cinco variáveis dada por $F = F(x,y,z,\lambda,\mu)$, sendo

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = xz + yz + \lambda(x^2 + z^2 - 2) + \mu(yz - 2).$$

Encontrando todas as derivadas parciais de F, em relação a cada uma de suas variáveis, e igualando cada uma delas zero, para encontramos os pontos críticos, obtemos:

(I) $F_x(x,y,z,\lambda,\mu) = z + 2\lambda x = 0;$

(II) $F_y(x,y,z,\lambda,\mu) = z + \mu z = 0;$

(III) $F_z(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y + 2\lambda z + \mu y = 0;$

(IV) $F_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + z^2 - 2 = 0;$

(V) $F_\mu(x,y,z,\lambda,\mu) = yz - 2 = 0.$

De (II) temos que $z(1+\mu) = 0$ e, por isso, $\mu = -1$ ou $z = 0$. Como $yz = 2$, segue que $z \neq 0$ e, consequentemente, só podemos ter $\mu = -1$.
Substituindo $\mu = -1$ e fazendo $(I)+(III)$, temos que $(x+z)+2\lambda(x+z) = 0$, ou seja, $0 = (x+z)(2\lambda+1)$ e, consequentemente, $x = -z$ ou $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Usando $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ em (III), temos que $z = x$. Assim, de (IV), temos que

$$x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Logo, $x = 1 \Rightarrow z = 1$ e $x = -1 \Rightarrow z = -1$. Usando (V) temos que $y = 2$, se $z = 1$, ou $y = -2$, se $z = -1$. Portanto, quando $\lambda = -\frac{1}{2}$, os pontos críticos de F ficam dados por:

$$\begin{cases} x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1, \quad \lambda = -\frac{1}{2}, \quad \mu = -1 \\ \\ x = -1, \quad y = -2, \quad z = -1, \quad \lambda = -\frac{1}{2}, \quad \mu = -1 \end{cases}.$$

Por outro lado, se $x = -z$, segue de (III) que $-z + 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Além disso, segue de (IV) que

$$x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Logo, $x = 1 \Rightarrow z = -1$ e $x = -1 \Rightarrow z = 1$. Usando (V) temos que $y = 2$, se $z = 1$, ou $y = -2$, se $z = -1$. Portanto, quando $\lambda = -\frac{1}{2}$, os pontos críticos de F ficam dados por:

$$\begin{cases} x = 1, \quad y = -2, \quad z = -1, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = -1 \\ \\ x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = -1 \end{cases}.$$

Observe que $f(1, 2, 1) = 3$, $f(-1, -2, -1) = 3$, $f(1, -2, -1) = 1$ e $f(-1, 2, 1) = 1$. Portanto, f tem um valor funcional máximo local de 3 e um valor funcional mínimo local de 1. ■

Exemplo 1.23.17 *Determine os pontos mais distantes da origem cujas coordenadas estão sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.*
***Dica**: Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como sendo a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (a função quadrado da função distância) e faça a maximização de f.*

Solução: Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita às restrições $0 = g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$ e $0 = h(x, y, z) = x + y + z - 1$. Assim, devemos usar os multiplicadores de Lagrange na resolução do problema. Seja F a função de cinco variáveis dada por

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 + z^2 - 4) + \mu(x + y + z - 1).$$

As derivadas parciais de F em relação a todas as variáveis ficam dadas por

(I) $0 = F_x(x, y, z, \lambda, \mu) = 2x + 2\lambda x + \mu$;

(II) $0 = F_y(x, y, z, \lambda, \mu) = 2y + 8\lambda y + \mu$;

(III) $0 = F_z(x, y, z, \lambda, \mu) = 2z + 2\lambda z + \mu$;

(IV) $0 = F_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$;

(V) $0 = F_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z - 1$.

De $(I) - (III)$ temos que $(x-z) + \lambda(x-z) = 0 \Rightarrow (x-z)(\lambda+1) = 0$. Assim, $x = z$ ou $\lambda = -1$.

CASO 1 - $x = z$: De (V), temos que $2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$. Dessa forma, usando (IV) temos que

$$x^2 + 4(1-2x)^2 + x^2 = 4 \Rightarrow 18x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}.$$

Tomando $x = 0$: Nesse caso, $z = 0$ e, de (V), temos que $y = 1$. Além disso, de (I) temos que $\mu = 0$ e de (II) temos que $\lambda = -\frac{1}{4}$. Observe também que (V) fica verdadeira para $(0, 1, 0)$. Portanto, para $x = z$, com $x = 0$, o ponto crítico fica dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = 0 \end{array} \right. .$$

Tomando $x = \frac{8}{9}$: Nesse caso, $z = \frac{8}{9}$ e, de (V), temos que $y = -\frac{7}{9}$. Usando (II) obtemos $-14 - 56\lambda + 9\mu = 0$ e de (I) temos que $16 + 16\lambda + 9\mu = 0$ e, consequentemente, $\lambda = \frac{1}{20}$ e $\mu = -\frac{28}{15}$. Portanto, para $x = z$, com $x = \frac{8}{9}$, o ponto crítico fica dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8}{9}, \quad y = -\frac{7}{9}, \quad z = \frac{8}{9}, \quad \lambda = \frac{1}{20}, \quad \mu = -\frac{28}{15} \end{array} \right. .$$

CASO 2 - $\lambda = -1$: Usando (I), temos que $\mu = 0$ e, de (II), temos que $y = 0$. Usando (V), temos que $x + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x$. Substituindo em (IV), chegamos a

$$x^2 + 0^2 + (1 - 2x + x^2) = 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Portanto, para $\lambda = -1$, os pontos críticos ficam dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = -1, \quad \mu = 0 \\ x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1+\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = -1, \quad \mu = 0 \end{array} \right. .$$

Como $f(0,1,0) = 1$, $f\left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = \frac{171}{81}$, $f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = 4$ e $f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 4$, segue que os pontos mais distantes da origem são os pontos $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$. ■

Agora, façас alguns exercícios.

1.24 Exercícios

Exercício 1.24.1 *Determine os pontos extremos de cada uma das funções abaixo, se existirem.*

1. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$;
3. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - y + 1$;
4. $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$;
5. $f(x,y) = e^{xy}$;
6. $f(x,y) = \dfrac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$;
7. $f(x,y) = sen(x) + sen(y)$;
8. $f(x,y) = e^x sen(y)$;

Exercício 1.24.2 *Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos extremos (suponha que eles existam) de cada função sujeita à restrição dada.*

1. $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$, *com restrição* $x^2 + y^2 - 4y = 0$;
2. $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$, *com restrição* $x^2 + y^2 - 2y = 0$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, *com restrição* $3x - 2y + z - 4 = 0$;
4. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, *com restrição* $y^2 - x^2 = 1$;
5. $f(x,y) = x^2 + y$, *com restrição* $x^2 + y^2 = 9$;
6. $f(x,y) = x^2 y$, *com restrição* $x^2 + 8y^2 = 24$;
7. $f(x,y,z) = xyz$, *com restrição* $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$;
8. $f(x,y,z) = y^3 + xz^2$, *com restrição* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

Exercício 1.24.3 *Estude os extremos da função* $f(x,y) = y + x^3$, *com a restrição* $y - x^3 = 0$.

Exercício 1.24.4 *Encontre o ponto da curva* $xy = 1$, $x > 0$ *e* $y > 0$, *que estão mais próximo da origem.*

Exercício 1.24.5 *Determine a reta tangente à curva* $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ *e* $y > 0$, *que forma com os eixos triângulo de área mínima.*

Exercício 1.24.6 *Determine o ponto do elipsoide* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ *cuja soma das coordenadas seja máxima.*

Exercício 1.24.7 *Ache três números positivos cuja soma é* 24*, de modo que o produto deles seja o maior possível.*

Exercício 1.24.8 *Ache três números positivos cujo produto é* 24 *e sua soma é a menor possível.*

Exercício 1.24.9 *Ache o volume do maior paralelepípedo que pode ser inscrito no elipsoide* $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$*, se os lados forem paralelos aos eixos coordenados.*

Exercício 1.24.10 *Ache a menor e a maior distância da origem a um ponto do elipsoide* $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$*.*

Exercício 1.24.11 *Encontre a menor distância entre o ponto* $(1, -1, -1)$ *e o plano* $x + 4y + 3z = 2$*.*

Exercício 1.24.12 *Encontre um valor funcional mínimo para* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *com os vínculos* $x + 2y + 3z = 6$ *e* $x - y - z = -1$*.*

Exercício 1.24.13 *Encontre um valor funcional máximo para* $f(x, y, z) = xyz$ *com os vínculos* $x + y + z = 4$ *e* $x - y - z = 3$*.*