2.3 Limite e Continuidade de Funções Vetoriais de Várias Variáveis

Com a mesma ideia utilizada na Seção 1.3 do Capítulo 1, vamos agora estender a noção de Limites para as funções vetoriais de várias variáveis.

Definição 2.3.1 *Seja $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial definida em todo ponto de $P \in D$ exceto, possivelmente, em $A \in \mathbb{R}^m$. Seja $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ um vetor constante. Dizemos que o Limite da função vetorial $\vec{f}$ é o vetor $\vec{a}$, quando P tende a A, e escrevemos,*

$$\lim_{P \to A} \vec{f}(P) = \vec{a},$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que $||\vec{f}(P) - \vec{a}|| < \epsilon$ sempre que $0 < ||P - A|| < \delta$.

Podemos perceber que a definição apresentada aqui é muito semelhante a apresentada para funções vetoriais de uma variável e, por isto, as propriedades apresentada a seguir são praticamente idênticas as anteriores.

Observação 2.3.1 *Considerando que:*

- *uma função vetorial $\vec{f}$ de várias variáveis é formada coordenada-a-coordenada por funções escalares de várias variáveis;*
- *numa função vetorial são válidas operações similares as operações para vetores;*
- *são estabelecidas as propriedades para limite de funções reais de várias variáveis,*

então, temos as seguintes propriedades para funções vetoriais de várias variáveis:

a) $\lim\limits_{P \to A} \vec{f}(P) = \vec{a} \Leftrightarrow \lim\limits_{P \to A} f_i(P) = a_i$, $\forall i \in 1, \cdots, n$ *(o limite da função vetorial é dado pelo limite de cada uma das suas funções coordenadas).*

b) Sendo $\vec{f}$ e $\vec{g}$ funções vetoriais de várias variáveis e h função escalar de várias variáveis tais que

$$\lim_{P \to A} \vec{f}(P) = \vec{a}, \lim_{P \to A} \vec{g}(P) = \vec{b} \text{ e } \lim_{P \to A} h(P) = m,$$

então, temos que são válidas as seguintes propriedades:

i. $\lim\limits_{P \to A} \left[\vec{f}(P) \pm \vec{g}(P)\right] = \vec{a} \pm \vec{b}$ *(o limite da soma de funções vetoriais é igual a soma dos limites das funções).*

ii. $\lim\limits_{P \to A} \left[\vec{f}(P) \cdot \vec{g}(P)\right] = \vec{a} \cdot \vec{b}$ *(o limite do produto escalar é igual ao produto escalar dos limites das funções).*

iii. $\lim\limits_{P\to A}\left[\vec{f}(P)\times\vec{g}(P)\right] = \vec{a}\times\vec{b}$ *(o limite do produto vetorial de duas funções vetoriais é o produto vetorial do limite, quando o produto vetorial estiver definido).*

iv. $\lim\limits_{P\to A}\left[h(P)\vec{f}(P)\right] = m\vec{a}$ *(o limite do produto de uma função escalar por uma função vetorial é igual ao produto dos limites).*

Exemplo 2.3.1 *Dada a função vetorial $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$, determine*

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}}\vec{f}(x,y).$$

Solução: Temos que $f_1(x,y) = y$ e que $f_2(x,y) = -x$. Desta forma,

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f_1(x,y) = \lim_{y\to 0} y = 0 \text{ e } \lim_{\vec{r}\to\vec{0}} f_2(x,y) = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{\vec{r}\to\vec{0}}\vec{f} = 0\vec{i} + 0\vec{j} = (0,0)$. ■

Exemplo 2.3.2 *Considere*

$$\vec{f}(P) = \left(e^{x-1}, \frac{y(x-1)}{x^2-1}, 3xz\right).$$

Determine $\lim\limits_{P\to A}\vec{f}(P)$, sendo $A = (1,2,1)$.

Solução: Temos que

$$\lim_{P\to A}\vec{f}(P) = \left(\lim_{P\to A}\left[e^{x-1}\right], \lim_{P\to A}\left[\frac{y(x-1)}{x^2-1}\right], \lim_{P\to A}[3xz]\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to 1}\left[e^{x-1}\right], \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left[\frac{y(x-1)}{x^2-1}\right], \lim_{\substack{x\to 1\\ z\to 1}}[3xz]\right) = (1,1,3).$$

Portanto, $\lim\limits_{P\to A}\vec{f}(P) = (1,1,3)$. ■

Observe que a desigualdade $0 < ||\vec{r} - \vec{r}_0|| < \delta$ representa todos os pontos do interior de uma bola centrada em A e com raio δ, exceto, o próprio centro (o ponto A). Logo, a Definição 2.3.1 pode ser interpretada da seguinte forma:

"Dada qualquer bola $B(\vec{a},\epsilon)$ de centro $\vec{a} = (a_1,\cdots,a_n)$ e raio ϵ, existe uma bola $B(A,\delta)$ de centro $A = (x_1,\cdots,x_n)$ e raio δ de forma que os pontos de $B(A,\delta)$ são levados por $\vec{f}$ em pontos de $B(\vec{a},\epsilon)$ e, com isso, a direção, sentido e o comprimento de $\vec{f}(P)$ tendem para os de $\vec{a}$ quando $P\to A$."

Vamos a mais exemplos.

Exemplo 2.3.3 *Seja $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ a função vetorial dada por $\vec{f}(x,y,z) = (x^2yz, x-y+z)$. Calcule $\lim\limits_{P\to A}\vec{f}(P)$ para as seguintes situações:*

a) $A = (1, 1, 1)$. *b)* $A = (0, 0, 0)$. *c)* $A = (1, -1, 0)$.

Solução:

a) Temos que $A = (1, 1, 1)$. Dessa forma, segue que

$$\lim_{P\to A} \vec{f}(P) = \lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} (x^2yz, x - y + z) = (1^2.1.1, 1 - 1 + 1) = (1, 1).$$

b) Temos que $A = (0, 0, 0)$. Assim,

$$\lim_{P\to A} \vec{f}(P) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2yz, x - y + z) = (0^2.0.0, 0 - 0 + 0) = (0, 0).$$

c) Temos que $A = (1, -1, 0)$ e, dessa forma, segue que

$$\lim_{P\to A} \vec{f}(P) = \lim_{(x,y,z)\to(1,-1,0)} (x^2yz, x-y+z) = (1^2.(-1).0, 1-(-1)+0) = (0, 2).$$

■

Exemplo 2.3.4 *Considere* $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *a função vetorial dada por*

$$\vec{f} = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, xy, x + y\right), & se \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0, 0), & se \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calcule, se existir, $\lim_{P\to\vec{0}} \vec{f}(P)$.

Solução: Para as funções coordenadas $f_2(x, y) = xy$ e $f_3(x, y) = x + y$, temos que o limite existe para qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$, visto que elas são funções polinomiais.
Para a função coordenada $f_1(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, vamos analisar o que acontece quando tomamos dois caminhos diferentes se aproximando da origem. Considere $S_1 = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}^+\}$ e $S_2 = \{(0, t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}$. Temos que $\lim_{t\to0^+} f_1(t, 0) = +\infty$ e que $\lim_{t\to0} g_1(0, t) = 0$. Por isso, temos que o limite de f_1 não existe na origem. Portanto, $\lim_{P\to\vec{0}} \vec{f}(P)$ não existe. ■

Vimos no Exemplo 2.3.4 que a função vetorial $\vec{f}$ estava definida no ponto A onde calculávamos o limite, mas o limite não existia no ponto. Quando o limite existe no ponto e este valor é igual ao valor da função no ponto, temos a noção de *Continuidade*, como definiremos a seguir.

Definição 2.3.2 *Seja* $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação. Dizemos que* $\vec{f}$ *é Contínua num ponto* $A \in D$ *se*

$$\lim_{P\to A} \vec{f}(P) = \vec{f}(A).$$

Como a definição de continuidade está diretamente relacionada com a definição de limite, segue que uma função vetorial de várias variáveis é contínua em A se, e somente se, cada uma das funções coordenadas é contínua em A. Agora, vamos aos exemplos.

Exemplo 2.3.5 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$*. Então, como* $f_1(x,y) = y$ *e* $f_2(x,y) = -x$ *são contínuas em todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *(pois são funções polinomiais), segue que* $\vec{f}$ *é contínua em todo* $\mathbb{R}^2$*.*

■

Exemplo 2.3.6 *Seja* $\vec{f}(x,y,z) = \left(e^{x-1}, \dfrac{y(x-1)}{x^2-1}, 3xz\right)$*. Então, temos que* $f_1(x,y,z) = e^{x-1}$ *e* $f_3(x,y,z) = 3xz$ *são contínuas em todo o* $\mathbb{R}^3$*, visto que não existe restrições para as variáveis em nenhuma das duas funções coordenadas.*
Já para a função coordenada $f_2(x,y,z) = \dfrac{y(x-1)}{x^2-1}$*, temos que* f_3 *é a divisão de dois polinômios e, por isto, temos que* f_3 *é contínua apenas nos pontos do* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $x \neq \pm 1$ *(denominador não nulo).*
Portanto, $\vec{f}$ *é contínuas em todos os pontos do* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $x \neq \pm 1$*, ou seja,* $\vec{f}$ *é contínua no conjunto*

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \neq \pm 1\}.$$

■

Exemplo 2.3.7 *A função vetorial* $\vec{f}(x,y,z) = \dfrac{-k\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$*, onde* k *é uma constante positiva e* $\vec{r} = (x,y,z)$ *é o vetor posição do ponto* $P \in \mathbb{R}^3$ *é uma função vetorial contínua em todos os pontos do* $\mathbb{R}^3$*, exceto a origem, pois* $\vec{f}$ *não está definida na origem.*

■

Exemplo 2.3.8 *Considere a seguinte função vetorial*

$$\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{|x+y|}\right), & se \quad |x+y| \neq 0 \\ 0, & se \quad |x+y| = 0 \end{cases}.$$

Mostre que $\vec{f}(P)$ *é descontínua para todo* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a+b=0$*.*

Solução: Vamos considerar o conjunto formado por todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ tais que $(x,y) \to (a,b)$ de forma que $a+b > 0$. Então, para elementos desse conjunto, temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f_2(x,y) = 1$ e, dessa forma, se o limite da função $\vec{f}$ existir, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \vec{f}(x,y) = 1 \neq 0 = \vec{f}(a,b).$$

Portanto, $\vec{f}$ é descontínua na origem. ■

Agora, vamos aos exercícios.

2.4 Exercícios

Exercício 2.4.1 *Calcule* $\lim\limits_{\vec{r}\to\vec{r}_0} \vec{f}(x,y,z)$ *em cada uma das funções abaixo.*

a) $\vec{f}(x,y,z) = \left(x^2+y^2, \dfrac{xy}{z}, \dfrac{x-2}{x^2-4}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (2,1,1)$;

b) $\vec{f}(x,y,z) = \left(e^x, \dfrac{sen(yz)}{yz}, x+y+z\right)$ *em* $\vec{r}_0 = \left(1,0,\frac{1}{2}\right)$;

c) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{x+y}{x-y}, x^2, \sqrt{z}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (2,1,4)$;

d) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{1}{xy}, \sqrt{xy}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (1,2)$;

e) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y} sen\left(\dfrac{y}{x}\right), \cos(x), \tan(yz)\right)$ *em* $\vec{r}_0 = \left(0,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

f) $\vec{f}(x,y,z) = \left(x\sqrt{y}, \dfrac{xz-x}{z^2-1}, y\ln(z)\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (3,4,1)$.

g) $\vec{f}(x,y) = \left(3x^2+xy-2y^2, 5x^2-2xy+y^2, \dfrac{3x-2y}{x+4y}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (2,-1)$;

h) $\vec{f}(x,y) = \left(y\sqrt[3]{x^3+2y}, \dfrac{x^4-(y-2)^4}{x^2-(y-2)^2}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (-2,4)$;

i) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{e^x+e^y}{\cos(x)+sen(y)}, \dfrac{sen^2(x)+\cos^2(y)}{e^{2x}+e^y}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (0,0)$;

j) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{(x-1)^{\frac{4}{3}}-(y-1)^{\frac{4}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}-(y-1)^{\frac{2}{3}}}, \dfrac{x^3-y^3}{x-y}\right)$ *em* $\vec{r}_0 = (1,1)$;

k) $\vec{f}(x,y,z) =$

$$= \left(4x^2y-3xyz^2+7y^2z^3, \frac{x^2y^2+y^2z^2}{x^2+z^2}, \frac{\sec(xy)+\sec(yz)}{y-\sec(z)}, \frac{(e^x+e^y+e^z)^2}{e^{2x}+e^{2y}+e^{2z}}\right)$$

em $\vec{r}_0 = (0,0,0)$.

Exercício 2.4.2 *Analise a continuidade das seguintes funções vetoriais.*

a) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{x^2}{y-1}, \dfrac{1}{x-y}, sen(\dfrac{y}{x})\right)$;

b) $\vec{f}(x,y) = \left(\ln(xy^2), \dfrac{4x^2y+3y^2}{2x-y}, \dfrac{5xy^2+2y}{16-x^2-4y^2}\right)$;

c) $\vec{f}(x,y) = \left(\ln(25-x^2-y^2), \arccos(x+y), e^{\frac{1}{x^2-y^2}}\right)$;

d) $\vec{f}(x,y) = \big(xy, x^2 - y^2, 2\big)$;

e) $\vec{g}(x,y,z) = \begin{cases} \big(x, ysen(y), xz^2 sen\left(\frac{1}{z}\right)\big), & se\ z \neq 0 \\ (x, ysen(y), 0), & se\ z = 0 \end{cases}$;

f) $\vec{h}(x,y) = (x\ln(y), y\ln(x))$;

g) $\vec{p}(x,y,z) = e^{xy}\vec{i} + \ln(xz)\vec{j} + 2\vec{k}$;

h) $\vec{q}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{x-y}, \dfrac{2}{x}, z\right)$;

i) $\vec{r}(x,y,z) = \dfrac{3\vec{a}}{||\vec{a}||}$, *onde* $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

j) $\vec{u}(x,y,z) = (x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$;

k) $\vec{f}(x,y) = \left(x\ln\left(\dfrac{y}{x}\right), \dfrac{1}{xy}, e^{xy}\right)$;

l) $\vec{g}(x,y) = (\sec(x), \tan(y))$

m) $\vec{g}(x,y,z) = \begin{cases} \left(xz, yz, \dfrac{x+y}{x-y}\right), & se\ x \neq y \\ (xz, yz, 0), & se\ x = y \end{cases}$.