5.3 Pontos de Acumulação

Definição 5.3.1 *Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um Ponto de Acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$, e escrevemos $a \in X'$, quando toda vizinhança V de a contém algum ponto x do conjunto $X \setminus \{a\}$.*

Observação 5.3.1 *Da Definição 5.3.1, temos que*

$$x \in X' \Leftrightarrow V_a \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing,$$

para toda vizinhança V_a de a. Em particular,

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing, \forall \ \epsilon > 0.$$

Outra consequência da Definição 5.3.1 é que

$$a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X \setminus \{a\}}.$$

Definição 5.3.2 *Se $a \in X$ não é um ponto de acumulação de X, então, dizemos que a é um Ponto Isolado de X.*

Se a é um ponto isolado de X, então, existe uma vizinhança V de a tal que $V \cap (X \setminus \{a\}) = \varnothing$, ou seja, existe um $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) = \varnothing$ e, por isso, a é o único ponto de X nessa vizinhança.

Definição 5.3.3 *Seja X um conjunto. Se todos os pontos do conjunto X são pontos isolados, então, dizemos que X é um conjunto Discreto.*

Exemplo 5.3.1 *a) Se $X = (0, 1]$, então, $X' = [0, 1]$.*
De fato: *Se $c \in X$ é tal que $0 < c < 1$, então, $V \cap (X \setminus \{c\}) \neq \varnothing$ e, por isso, c é um ponto de acumulação de X. Por outro lado, se $c = 0$ ou $c = 1$, então, $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap (X \setminus \{c\}) \neq \varnothing$, para todo $\epsilon > 0$ e, novamente, temos que c é um ponto de acumulação de X.*

Agora, seja $c < 0$. Tome $\epsilon = \dfrac{-c}{2}$. Assim, $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap (X \setminus \{c\}) = \varnothing$ e, por isso, c não é ponto de acumulação de X. O mesmo ocorre quando $c > 1$, tomando $\epsilon = \dfrac{c - 1}{2}$. Portanto, $X' = [0, 1]$. $\square$

b) Se X é um conjunto finito, então, X é um conjunto discreto.
De fato: *Seja $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_k\}$ um conjunto finito. Tome*

$$\epsilon = \frac{\displaystyle\min_{i=2,\cdots,n} \{x_{i+1} - x_i\}}{2}.$$

Assim, temos que $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon) \cap (X \setminus \{x_i\}) = \varnothing$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e, por isso, x_i não é ponto de acumulação de X, para todo i. Portanto, X é um conjunto discreto. $\square$

c) Se $X = \mathbb{Z}$, então, X é um conjunto discreto.
De fato: *Tome $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. Assim, $(n-\epsilon, n+\epsilon) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{n\}) = \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto.* $\square$

d) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ e $(\mathbb{Q}^C)' = \mathbb{R}$.
De fato: *Seja $x \in \mathbb{R}$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ temos que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, visto que todo intervalo possui números racionais e números irracionais. Portanto, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Analogamente, temos que $(\mathbb{Q}^C)' = \mathbb{R}$.* $\square$

e) De uma maneira geral, temos que

$$(a,b)' = [a,b]' = [a,b)' = (a,b]' = [a,b].$$

f) Se $X = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots\right\}$, então, $X' = \{0\}$.
De fato: *Observe que todos os elementos de X são pontos isolados, visto que, tomando $0 < \epsilon < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, segue que*

$$\left(\frac{1}{n} - \epsilon, \frac{1}{n} + \epsilon\right) \cap \left(X \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \varnothing.$$

Por outro lado, para todo $\epsilon > 0$, temos que se $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, então, $\dfrac{1}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)$ e, por isso, $0 \in X'$. Se $x \in]0,1]$, então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n}$ e, por isso, $x \notin X$ e, além disso, tomando $2\epsilon = \min\left\{d\left(\dfrac{1}{n}, x\right), d\left(\dfrac{1}{n+1}, x\right)\right\}$, segue que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X = \varnothing$. Portanto, $x \notin X'$. Por fim, se $x > 1$ ou $x < 0$, então, $x \notin X'$, pois sempre existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap (X \setminus \{x\}) = \varnothing$. Portanto, $X' = \{0\}$. $\square$

Teorema 5.3.1 *Dado $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *a é um ponto de acumulação de X;*
2. *a é o limite de uma sequência de pontos $x_n \in (X \setminus \{a\})$;*
3. *Todo intervalo aberto de centro em a contém uma infinidade de pontos de X.*

De fato: Provemos que vale o encadeamento de implicações:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).$$

Assim, teremos demonstrado as equivalências.

(1) $\Rightarrow$ (2): Seja $a \in X'$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n \in \left(a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right) \cap (X \setminus \{a\})$. Daí, temos que $x_n \in (X \setminus \{a\})$ e $x_n \to a$, provando (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Seja $x_n \in (X \setminus \{a\})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $x_n \to a$. Para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito pois, caso contrário, $x_n = x_{n_1}$, para todo $n > n_1$ e, consequentemente, $x_{n_1} = a$, o que é um absurdo, visto que $x_{n_1} \in X$ e $a \notin X$. Assim, tendo que $x_n \to a$, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, segue que $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ contém uma infinidade de pontos de X, provando (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Suponha que, para todo $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X$ possua uma infinidade de pontos. Então, toda vizinhança de a possui pontos de $X \setminus \{a\}$ e, por isso, $a \in X'$, provando (1). $\square$

Podemos reescrever o Teorema de Bolzano-Weierstrass (Corolário 3.1.1) em função de pontos de acumulação, como apresentado a seguir.

Teorema 5.3.2 *Todo conjunto infinito e limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja X um conjunto infinito e limitado de números reais. Então, X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ ($x_i \neq x_j$, se $i \neq j$). Fixando essa enumeração, temos uma sequência limitada de números reais e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Corolário 3.1.1), segue que essa sequência possui uma subsequência convergente, digamos $(x_{r_k})_{k \in \mathbb{N}}$.
Reordenando-se os índices da subsequência, obtemos uma sequência (x_k) convergente em X. Seja $a = \lim x_n$. Como $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, segue que, no máximo, um dos elementos x_k da sequência vale a e, retirando o mesmo da sequência, temos que $x_n \to a$ e que $x_n \in (X \setminus \{a\})$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por isso, $a \in X'$. $\blacksquare$