Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Prova	3^a Avaliação de Cálculo Diferencial e Integral 1 - 03/07/2023
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÃO** ser corrigida.
- Só serão corrigida 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção a ser desconsiderada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 21:00 as 22:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a sua prova será anulada.

1ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Obtenha o valor da área da região limitada pelas curvas $y = x\ln(x)$, pelo eixo das abscissas e pela reta $x = e^2$.

Solução: O valor da área procurada é dada por $\displaystyle\int_1^{e^2} x\ln(x)dx$. Logo, considerando $u = \ln(x)$ e $dv = xdx$, segue que $du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$. Assim, utilizando a fórmula de integração por partes, segue que:

$$\int_1^{e^2} x\ln(x)dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_1^{e^2} - \int_1^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2\ln(x)}{2}\bigg|_1^{e^2} - \int_1^{e^2}\frac{x}{2}dx = \left(\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\bigg|_1^{e^2} =$$

$$= \left(\frac{(e^2)^2\ln(e^2)}{2} - \frac{(e^2)^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2\ln(1)}{2} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{e^4.2\ln(e)}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3e^4+1}{4}.$$

2ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Obtenha o valor de $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x}{x^2-5}dx$.

Solução: Considere $u = x^2 - 5$. Então, temos que $du = 2xdx$. Além disso, para $x = 3$, segue que $u = 3^2 - 5 = 4$ e para $x = 5$ segue que $u = 5^2 - 5 = 20$. Portanto,

$$\int_3^5 \frac{2x}{x^2-5}dx = \int_4^{20}\frac{1}{u}du = \ln(|u|)|_4^{20} = (\ln(20) - \ln(4)) = \ln(5).$$

3ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Um objeto descreve um movimento retilíneo, tal que $a(t) = 12t^2 - 6t$. Se as condições iniciais são $v(0) = -1$ e $s(0) = 2$, determine $s(t)$.

Solução: Temos que $a(t) = v'(t)$. Logo, como $a(t) = 12t^2 - 6t$, segue que

$$v(t) = \int (12t^2 - 6t)dt = \frac{12t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + k = 4t^3 - 3t^2 + k, k \in \mathbb{R}.$$

Como a velocidade da partícula em $t = 0$ é $v(0) = -1$, segue que $4.0^3 - 3.0^2 + k = -1 \Rightarrow k = -1$. Portanto,

$$v(t) = 4t^3 - 3t^2 - 1.$$

Por outro lado, temos que $v(t) = s'(t)$. Logo, como $v(t) = 4t^3 - 3t^2 - 1$, segue que

$$s(t) = \int (4t^3 - 3t^2 - 1)dt = \frac{4t^4}{4} - \frac{3t^3}{3} - t + m = t^4 - t^3 - t + m, m \in \mathbb{R}.$$

Como a posição inicial da partícula é $s(0) = 2$, segue que $0^4 - 0^2 - 0 + m = 2 \Rightarrow m = 2$. Portanto, a equação do movimento $s(t)$ é dada por:

$$s(t) = t^4 - t^3 - t + 2.$$

4ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Calcule o valor do limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{3x^3 - x^2 - 9x + 7}$.

Solução: Observe que $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \to 0$ quando $x \to 1$. Da mesma forma, temos que $3x^3 - x^2 - 9x + 7 \to 0$ quando $x \to 1$. Assim, pela Regra de L'Hôpital temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{3x^3 - x^2 - 9x + 7} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)'}{(3x^3 - x^2 - 9x + 7)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 6x + 6}{9x^2 - 2x - 9} = \frac{3 - 6 + 6}{9 - 2 - 9} = -\frac{3}{2}.$$

5ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Faça um estudo do crescimento e concavidade da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4$. Faça um esboço preciso do gráfico da função.

Solução: Temos que $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 15x^4 - 20x^3 = 5x^3(3x - 4)$ e $f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$. Assim, f' e f'' existem para todos os números reais, pois ambos são polinômios. Além disso, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{4}{3}$ e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Portanto, os pontos críticos de f são os pontos $x = 0$ e $x = \dfrac{4}{3}$ e os candidatos a ponto de inflexão são os pontos $x = 0$ e $x = 1$.

Observe que f não possui assíntotas verticais e oblíquas. Além disso,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

e, por isso, f não possui assíntotas horizontais. Fazendo um estudo do sinal de f' e f'' chegamos a Tabela 1.

x	f	f'	f''	Crescimento	Concavidade	Conclusão
$x < 0$		$+$	$-$	Crescente	P/ Baixo	
$x = 0$	0					máximo local
$0 < x < 1$		$-$	$-$	Decrescente	P/ Baixo	
$x = 1$	-2	0				ponto de inflexão
$1 < x < \frac{4}{3}$		$-$	$+$	Decrescente	P/ Cima	
$x = \frac{4}{3}$	$-\frac{7}{2}$					mínimo local
$x > \frac{4}{3}$		$+$	$+$	Crescente	P/ Cima	

Tabela 1: Estudo da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

Com isso, temos que o Esboço do gráfico da função f fica dado pela Figura 1.

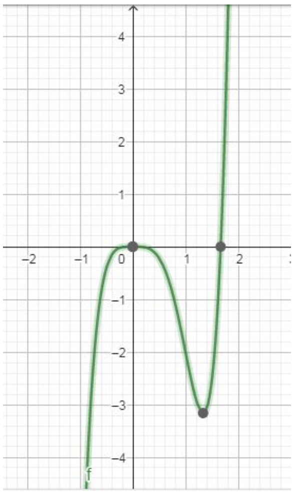

Figura 1: Esboço do gráfico da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

6ª **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre a derivada da função $f(x) = \arccos(x)$.

Solução: Temos que $y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$, com $0 \leq y \leq \pi$. Como $\operatorname{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(y) = 1 - \cos^2(y)$, segue que $\operatorname{sen}(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$. Assim, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}(y)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Portanto, $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!