Capítulo 1

Conjuntos

1.1 A Noção de Conjuntos

A matemática atual é totalmente formulada na linguagem de *Conjuntos*. Dessa forma, é possível expressar todos os conceitos matemáticos de forma simples e elegante. A *Teoria dos Conjuntos* foi formalizada por Georg Cantor $(1845-1918)$, no final do século XIX e esta despertou interesse generalizado, influenciando todas as áreas da matemática.

Um conjunto pode ser descrito como sendo a coleção de todos os elementos que apresentam a mesma característica. Desta forma, dado um conjunto A e um elemento a qualquer, sempre é possível verificar se o elemento a é, ou não, um elemento do conjunto A.

Se a é um elemento do conjunto A, então, dizemos que *a Pertence* ao conjunto A, e escrevemos $a \in A$. Caso contrário, dizemos que *a Não Pertente* ao conjunto A, e escrevemos $a \notin A$.

A nossa preocupação estará apenas com conjuntos matemáticos, cujos elementos são: números, pontos, funções, matrizes, e qualquer outro conjunto derivado destes.

Conjuntos são utilizados para substituir propriedades e condições. Por isso, se x goza de uma propriedade A, dizemos que $x \in A$; se y satisfaz a condição B, dizemos que $y \in B$. Com isso, temos que A é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade A e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição B.

Exemplo 1.1.1

1. *Seja P a propriedade de um número inteiro ser múltiplo de 3. Assim, temos que P pode ser visto como sendo o conjunto*

$$A = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}.$$

2. *Seja Q a condição sobre o número real y que satisfaz $y^2 - 7y + 12 = 0$. Assim, temos que Q pode ser visto como sendo o conjunto*

$$B = \{3, 4\}.$$

3. *Seja* Π *um plano e* $\overline{AB}$ *um segmento de reta desse plano. Se* r *tem a propriedade de ser a mediatriz do segmento* $\overline{AB}$*, então, na linguagem de conjuntos,*
$$r = \{P \in \Pi \mid d(\overline{AP}) = d(\overline{PB})\},$$
onde $d(\overline{AB})$ *é a distância do ponto* A *ao ponto* B*.*

$\square$

A vantagem de se usar a linguagem de conjuntos, em vez de dizer que um determinado elemento goza de uma propriedade, é a álgebra que se herda das operações de Reunião, Intersecção e Inclusão de Conjuntos. As propriedades e regras operatórias dessa álgebra são fáceis de ser manipuladas e representam um enorme ganho em simplicidade e exatidão.

A representação de um conjunto se dá por uma letra maiúscula do alfabeto arábico. Para descrever os elementos de um conjunto, usamos a enumeração dos elementos entre chaves ou alguma lei de formação. Por exemplo, se A é o conjunto dos números inteiros positivos pares, então, o conjunto A pode ser representado por $A = \{2, 4, 6, \cdots\}$, ou $A = \{\text{números inteiros positivos pares}\}$ ou $A = \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$, mas nunca se escreve
$$A = \{\text{conjunto dos números inteiros positivos pares}\}.$$

Definição 1.1.1 *Um conjunto que não possui elementos é chamado de Conjunto Vazio. Usamos os símbolos* $\varnothing$ *ou* $\{\}$*, par representar o conjunto vazio.*

Qualquer propriedade contraditória pode ser utilizada para descrever o conjunto vazio. Por exemplo, se A é o conjunto formado por todos os valores de x tais que $x > 0$ e $x < 0$, então, $A = \varnothing$. É importante ressaltar que o conjunto vazio é representado por $\varnothing$ ou $\{\}$. A notação $\{\varnothing\}$ representa um conjunto que tem como elemento o símbolo $\varnothing$.

Definição 1.1.2 *Um conjunto que possui um único elemento é chamado de Conjunto Unitário.*

É óbvio que x e $\{x\}$ não representa a mesma coisa. Contudo, quando não houver dúvida sobre o que está sendo tratando, poderemos usar x em vez de $\{x\}$. Isso é muito comum na geometria, por exemplo, é comum dizer que P é o ponto de intersecção entre duas retas r e s, e não escrevemos $\{P\}$.

1.2 A relação de inclusão

Definição 1.2.1 *Sejam* A *e* B *dois conjuntos. Se todo elemento de* A *também é elemento de* B*, então, dizemos que o conjunto* A *é um Subconjunto do conjunto* B *e usamos a notação* $A \subset B$*. A relação* $A \subset B$ *é chamada de Relação de Inclusão.*

Outras formas de nos referimos a relação de inclusão é: o conjunto A é *Parte* de B ou o conjunto A *Está Contido* no conjunto B.

Exemplo 1.2.1 1. *Se A é o conjunto de todos os triângulos e B é o conjunto de todos os polígonos, segue que A é um subconjunto de B, visto que todo triângulo é um polígono.*

2. *Se A é o conjunto de todos os quadrados e B é o conjunto de todos os trapézios, segue que A é parte do conjunto B, pois todo quadrado é um quadrilátero convexo que tem dois pares de lados opostos paralelos, todos os ângulos com a mesma medida e todos os lados de mesmo comprimento, enquanto que o trapézio é um quadrilátero convexo que tem um par de lados opostos paralelos.*

□

Se A não é um subconjunto de B, então, existe um elemento x em A tal que x não é um elemento de B. Nesse caso, dizemos que A não está contido em B e escrevemos $A \not\subset B$.

Exemplo 1.2.2 1. *Seja A o conjunto de todas as retas do plano Π paralelas a reta r e seja B o conjunto de todas as retas diferentes de r. Nesse caso, $A \not\subset B$, visto que r é um elemento de A e r não é um elemento de B.*

2. *Seja A o conjuntos dos números primos e B o conjunto dos números ímpares. Então, $A \not\subset B$, visto que 2 é primo e 2 não é um elemento do conjuntos dos números ímpares.*

3. *Seja A o conjunto de números pares e B o conjunto dos múltiplos de 3, então, $A \not\subset B$ pois $2 \in A$ e $2 \notin B$ e $B \not\subset A$ pois $3 \in B$ e $\notin A$.*

□

Temos que $A \subset A$ e $\varnothing \subset A$, para todo conjunto A.

De fato: Suponha que $A \not\subset A$. Então, existe um elemento x no conjunto A tal que x não é elemento do conjunto A, o que é claramente uma inconsistência. Logo, $A \subset A$. Por outro lado, suponha que $\varnothing \not\subset A$, então, existe $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, contudo, como o conjunto vazio não possui elemento, não existe tal x e, consequentemente, $\varnothing \subset A$.

Definição 1.2.2 *Dizemos que A é um Subconjunto Próprio de B se $A \neq \varnothing$, se $A \neq B$ e $A \subset B$.*

A relação de inclusão goza de três propriedades fundamentais. Para todos os conjuntos A, B e C:

- *Reflexividade*: $A \subset A$;
- *Anti-simetria*: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então, $A = B$.
- *Transitividade*: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então, $A \subset C$.

A propriedade de anti-simetria da inclusão é muito utilizada na matemática para provar a igualdade entre dois conjuntos. A transitividade da inclusão é a base do raciocínio lógico, chamada de *Silogismo*. Um exemplo de silogismo: "Todo homem é um animal." e "Todo animal é mortal.". Logo, "Todo homem é mortal".

Observação 1.2.1 *1. Se $a \in A$, então, $\{a\} \subset A$.*

2. Na Geometria os elementos são os pontos. Por outro lado, as retas, os planos e o espaço são conjuntos de pontos. Logo, uma reta r é um subconjunto do plano Π, ou seja, $r \subset \Pi$ e, por isso, não é correto dizer que $r \in \Pi$.

3. A inclusão entre conjuntos está relacionada com a implicação lógica.

***De fato**: Se P tem a propriedade referente a um elemento genérico de U, então, pode-se considerar que A é o conjunto de todos os elementos de U com a propriedade P. Analogamente, B é o conjunto de todos os elementos de U com a propriedade Q. Desta forma, dizer que a propriedade P implica (ou acarreta) na propriedade Q ($P \Rightarrow Q$) equivale a dizer que $A \subset B$.*

Exemplo 1.2.3 *1. Seja P a propriedade de um número ser raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$ e Q a propriedade de um número ser raiz da equação $x^3 - 2x + 1 = 0$. Então, temos que $P \Rightarrow Q$.*

***De fato**:*

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + x - 1)(x - 1) = 0(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0.$$

2. Seja U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Se P é a propriedade de um quadrilátero de U ter quatro ângulos retos e Q é a propriedade de um quadrilátero de U ter os lados opostos paralelos, então, $P \Rightarrow Q$.

***De Fato**: Considere um elemento de U, como apresentado na Figura 1.1.*

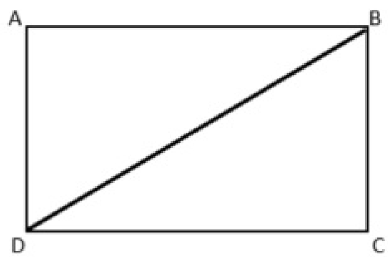

Figura 1.1: Representação de um quadrilátero convexo com os quatro ângulos medindo 90°.

Considere $\overline{BD}$ a diagonal do quadrilátero. Assim, os triângulos BAD e DCB são triângulos retângulos de hipotenusa $\overline{BD}$. Como o ângulo $\widehat{ADC}$ é um retângulo, segue que

$$I : \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = 90°.$$

Do triângulo DCB, segue que

$$II : \widehat{CBD} + \widehat{CDB} = 90°.$$

Assim, de I e de II, temos que $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$. De maneira análoga, concluímos que $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$. Portanto, pelo critério ALA os triângulos BAD e DCB são congruentes e, por isso, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Por fim, seja r a reta que contém o segmente de reta $\overline{AB}$ e s a reta que contém o segmento de reta $\overline{BC}$. Como $\overline{AD} = \overline{BC}$, segue que r e s tem a mesma distância entre duas perpendiculares distintas. Logo, $r \parallel s$. Com um raciocínio análogo, conclui-se que a reta que passa por $\overline{AB}$ é paralela a reta que passa por $\overline{DC}$. Portanto, $ABCD$ é um quadrilátero convexo com lados opostos paralelos.

□

Observação 1.2.2 *A implicação $P \Rightarrow Q$ pode ser lida de várias formas:*

- *P implica em Q;*
- *P é condição suficiente para Q;*
- *Q é condição necessária para P;*
- *Se P, então, Q;*
- *P somente se Q.*

Definição 1.2.3 *A Recíproca de uma implicação $P \Rightarrow Q$ é a implicação $Q \Rightarrow P$.*

É importante ressaltar que a recíproca de uma implicação $P \Rightarrow Q$ pode não ser verdadeira. Por exemplo, $x^3 - 2x + 1 = 0 \not\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$, visto que 1 é raiz de $x^3 - 2x + 1 = 0$ mas não é raiz de $x^2 + x - 1 = 0$.

Definição 1.2.4 *Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são implicações verdadeiras, então, temos uma Equivalência. Nesse caso, dizemos que P se, e somente se, Q ou P é condição suficiente e necessária para Q, e escrevemos $P \Leftrightarrow Q$.*

Exemplo 1.2.4

1. *Seja P a propriedade de um triângulo com lados $x \leq y \leq z$ ser retângulo e seja Q a propriedade de triângulo com lados $x \leq y \leq z$ satisfazer a relação $z^2 = y^2 + x^2$. Então, $P \Leftrightarrow Q$.*

2. *Seja P a propriedade de um quadrilátero convexo ser um quadrado e seja Q a propriedade de um quadrilátero convexo ser um retângulo e um losango ao mesmo tempo. Então, $P \Leftrightarrow Q$.*

$\square$

É importante ressaltar que na matemática as proposições são sempre do tipo "P implica em Q".

Exemplo 1.2.5 1. *Se $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.*

2. *Se $a > b \geq c$ são lados de um triângulo retângulo, então, $a^2 = b^2 + c^2$.*

$\square$

A solução de uma equação é obtida aplicando uma sequência de implicações lógicas, como ilustrada no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.6

$$(P) x^2 - x - 2 = 0;$$
$$(Q) (x+1)(x-2) = 0;$$
$$(R) x = -1 \quad ou \quad x = 2;$$
$$(S) x \in \{-1, 2\}.$$

Para esse caso, temos que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S$, ou seja,

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 2\}.$$

Por outro lado, também temos que $S \Rightarrow R \Rightarrow Q \Rightarrow P$, ou seja,

$$x \in \{-1, 2\} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Portanto, $P \Leftrightarrow Q$.

$\square$

É importante ressaltar aqui que nem sempre existe a equivalência, ou seja, nem sempre todas as recíprocas das implicações são verdadeiras, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.7 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Assim,*

$$(P) x^2 + 1 = 0;$$
$$(Q) (x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0(x^2 - 1);$$
$$(R) x^4 - 1 = 0;$$
$$(S) x^4 = 1;$$
$$(T) x = \pm 1,$$
$$(V) x \in \{\pm 1\}.$$

Temos que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S \Rightarrow T \Rightarrow V$, ou seja,

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 1\}.$$

Por outro lado, $V \Rightarrow T \Rightarrow S \Rightarrow R \Rightarrow Q$, mas $Q \not\Rightarrow P$, o que faz com que não exista uma equivalência entre P e V. $\square$

1.3 O Complementar de um Conjunto

Definição 1.3.1 *O Conjunto Universo é formado por todos os elementos do tema em estudo.*

Fixado o conjunto universo U, todos os conjuntos considerados serão subconjuntos de U, visto que todos os elementos em estudo estão contidos em U.

Definição 1.3.2 *Seja A um subconjunto de U. Então, chamamos de Complementar do conjunto A, e escrevemos A^C, ao conjunto formado por todos os elementos de U que não são elementos de A.*

Como todo elemento x do objeto em estudo é um elemento de U, segue que para todo subconjunto A de U, $x \in A$ ou $x \notin A$, em outras palavras, é válido o *Princípio do Terceiro Excluído* da Lógica. Ainda, $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo e, por esta razão, é válido o *Princípio da Não-Contradição* da Lógica.

Observação 1.3.1 *Dos princípios do terceiro excluído e da não-contradição, segue que:*

1. $\forall A \subset U$, *temos que* $\left(A^C\right)^C = A$.
2. $\forall A, B \subset U$, *temos que* $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

   De fato:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \Leftrightarrow B^C \subset A^C.$$

3. $P \Rightarrow Q$ *é equivalente a* $Q' \Rightarrow P'$, *onde* A' *corresponde a negação do conjunto* A. *Resumidamente,*

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q' \Rightarrow P'.$$

Exemplo 1.3.1 *1. Seja U o conjunto dos quadriláteros convexos, R o conjunto dos retângulos e P o conjunto dos paralelogramos. Então, $R \Rightarrow P$ é dada por: "Todo quadrilátero convexo que é um retângulo é um paralelogramo". Por outro lado, temos que P' é o conjunto dos quadriláteros que não são paralelogramos e R' é o conjunto dos quadriláteros convexos que não são retângulos, com isto, $P' \Rightarrow R'$ é dada por: "Um quadrilátero convexo que não é um paralelogramo não é um retângulo."*

Observe que a implicação $R' \Rightarrow P'$ pode não ser verdadeira. Por exemplo, existem losango que não são retângulos, porém eles são paralelogramos.

2. *Seja U o conjunto dos números inteiros maiores do que 2, P a propriedade do número ser primo e Q a propriedade do número ser ímpar. Assim, $P \Rightarrow Q$ fica dada por: "Se x é um número primo maior do que dois, então, x é um número ímpar.*

   Por outro lado, Q' é a propriedade do número ser par e P' é a propriedade do número não ser primo. Assim, $Q' \Rightarrow P'$ fica dada por: "Se x não é um número ímpar, então, x não é um número primo.

   Novamente, temos que a implicação $P' \Rightarrow Q'$ não é a negação de $P \Rightarrow Q$, visto que existem números ímpares que não são primos.

□

Definição 1.3.3 *A implicação $Q' \Rightarrow P'$ é a Contrapositiva da implicação $P \Rightarrow Q$.*

A contrapositiva é apenas uma forma diferente de escrever a implicação. É comum substituir uma implicação pela sua contrapositiva para tornar o significado da mesmas mais claro. Na verdade, a equivalência $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q' \Rightarrow P'$é a base para as demonstrações por absurdo.

Exemplo 1.3.2 1. *Se $ABCD$ é um retângulo, então, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.*

   De fato: Suponha que $\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$. Então, existe um ponto E que é a intersecção das retas r (que contém $\overline{AB}$) e a reta s (que contém $\overline{DC}$). Considere o triângulo BDE. Assim, este triângulo possui dois ângulos retos, o que é um absurdo na geometria euclidiana. Portanto, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

   De maneira análoga, supondo que $\overline{AD} \nparallel \overline{BC}$ e considerando que as retas t (que contém $\overline{AD}$) e q (que contém $\overline{BC}$) não são paralelas, existe um ponto F de intersecção entre t e q. Logo, o triângulo ADF possui dois ângulos retos, o que novamente é um absurdo na geometria euclidiana. Portanto, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

2. *Seja $r, s \subset \Pi$, duas retas distintas com $r \perp s$. Seja P a propriedade das retas $x \subset \Pi$ tais que $x \neq s$ e $x \perp r$. Seja Q a propriedade de uma reta $x \subset \Pi$ ser paralela a s. Então, a implicação $P \Rightarrow Q$ fica dada por: "Se duas retas distintas (s e x) são perpendiculares a uma terceira reta (r), então, (s e x) elas são paralelas.*

   Por outro lado, temos que Q' fica dada por $x \nparallel s$ e P' fica dada por $x = s$ ou $x \not\perp r$. Então, a implicação $Q' \Rightarrow P'$ fica dada por: "Se duas retas distintas não são paralelas, então, elas não são perpendiculares a uma terceira reta.

   ***De fato**: se x e s não são paralelas, então, existe um ponto P de intersecção entre x e s. Seja Q o ponto de intersecção entre as retas x e r e seja S o ponto de intersecção entre as retas x e r, como visto na Figura 1.2.*

   Como $s \perp r$, segue que o triângulo PQS é retângulo e, por isso, $\widehat{SQP}$ não é retângulo. Portanto, $r \not\perp x$.

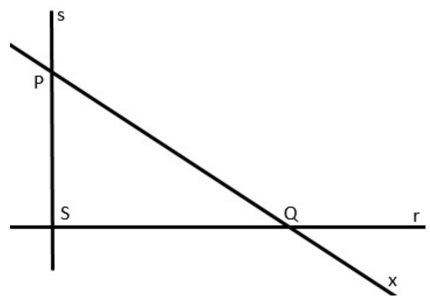

Figura 1.2: Representação das retas s, r e s, com $x \nparallel s$.

□

É preciso ter muito cuidado e atenção ao negar uma implicação. Considere a proposição "todo homem é mortal". O primeiro impulso nos leva a dizer que "todo homem é imortal", o que está incorreto. O certo seria dizer que existe, pelo menos, um homem que não é mortal. Esse comentário está sintetizado na observação a seguir.

Observação 1.3.2

1. *A negação de "TODO" é "EXISTE PELO MENOS UM".*
2. *A negação de "EXISTE" é "TODO".*

Exemplo 1.3.3

1. *Se P : "Todo número primo é ímpar.", então, P' : "Existe pelo menos um número primo que não é impar."*
2. *Se P : "Existe um triângulo isósceles que é equilátero.", então, P' : "Todo triângulo isósceles não é equilátero."*

□

Para finalizar, lembre-se: "A negação de uma proposição não é a proposição oposta."

1.4 Reunião e Interseção

Definição 1.4.1 *Sejam $A, B \subset U$. A Reunião de A com B é o conjunto denotado por $A \cup B$, formado por todos os elementos de A com todos os elementos de B.*

Definição 1.4.2 *Sejam $A, B \subset U$. A Interseção de A com B é o conjunto denotado por $A \cap B$, formado por todos os elementos que são ao mesmo tempo elementos de A e de B.*

Veja o seguinte comentário: dizer que $x \in A \cup B$ corresponde a dizer que x é um elemento de A ou de B, já dizer que $x \in A \cap B$ corresponde a dizer que x é um elemento de A e de B ao mesmo tempo. Por isso, existe uma relação dos conectivos lógicos *ou* e *e*, respectivamente.

Portanto, se A é o conjunto formado por todos os elementos de U que gozam da propriedade P e B é o conjunto formado por todos os elementos de U que gozam da propriedade Q, então, o conjunto $A \cup B$ é dado por P ou Q e o conjunto $A \cap B$ é dado por P e Q.

Exemplo 1.4.1

1. *Se A é o conjunto solução da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ e seja B o conjunto solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Então, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Logo, $A \cap B = \{2\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.*
2. *Seja P a propriedade de um número ser ímpar e Q a propriedade de um número ser múltiplo de 3. Assim, temos que $P \cap Q = \{\cdots, -9, -3, 3, 9, \cdots\}$ e $P \cup Q = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$.*

□

Observação 1.4.1 *Para a reunião e a interseção valem as seguintes propriedades:*

1. *comutativa:* $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$.
2. *associativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *e* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. *distributiva:* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *e* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   ***De fato*:**

$$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cup B \quad e \quad x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \quad ou \quad x \in B) \quad e \quad x \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \quad e \quad x \in C) \quad ou \quad (x \in B \quad e \quad x \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \cap C) \quad ou \quad (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

4. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
5. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$ *e* $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C, \ \forall C$.
6. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *e* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

   ***De fato*:** *Primeiro vamos provar que vale $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$. Para isto, veja que se $x \notin (A \cup B)$, então, $x \notin A$, visto que $A \subset (A \cup B) \Leftrightarrow (A \cup B)^C \subset A^C$ (Observação 1.3.1, Item 2). Analogamente, se $x \notin (A \cup B)$, então, $x \notin B$ e, consequentemente, se $x \notin (A \cup B)$, então, $x \notin A$ e $x \notin B$. Portanto, se $x \notin (A \cup B)$, então, $x \in A^C$ e $x \in B^C$, isto é, se $x \notin (A \cup B)$, então, $x \in A^C \cap B^C$. Daí,*

$$x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in A^C \cap B^C.$$

   Agora vamos mostrar a outra inclusão, ou seja, vamos mostrar que $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$. Se $x \in A^C \cap B^C$, segue que $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$. Como $(A \cup B)^C \subset A^C$ (De fato: $x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \notin A$) e $(A \cup B)^C \subset B^C$, segue que $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)^C$ e, com isto, segue que $x \in (A \cup B)^C$.

   Portanto, $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$ e $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$, ou seja, $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$.

Algumas das provas de propriedades não foram feitas. Faça-as, como exercício, para adquirir familiaridade com as mesmas. Faça alguns exercícios e bons estudos.