Capítulo 2

Conjunto dos Números Reais

Nesse capítulo serão descritas propriedades para o conjunto dos números reais que são necessárias para o resto do curso. Aqui descreveremos algumas propriedades dos *Conjuntos Não-Enumeráveis.* Iniciemos estabelecendo a noção de *Corpo.*

2.1 $\mathbb{R}$ é um Corpo

Definição 2.1.1 *Seja K um conjunto onde são definidas duas operações, uma chamada de Adição e outra de Multiplicação, que são descritas a seguir:*

i. Adição:

$$\begin{array}{rccc} +: & K \times K & \to & K \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

que faz corresponder a cada par de elementos de K ao novo elemento de K, chamado de Soma.

ii. Multiplicação:

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & K \times K & \to & K \\ & (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

que faz corresponder a cada par de elementos de K ao novo elemento de K, chamado de Produto.

Essas operações obedecem os seguintes axiomas: para todos os elementos $x, y, z \in K$ temos:

a) A soma é associativa, ou seja, $(x+y)+z = x+(y+z)$;

b) A soma é comutativa, ou seja $x+y = y+x$;

c) Existe um elemento neutro na soma, ou seja, existe $0 \in K$ tal que $x+0 = x$;

d) Existe um elemento oposto (ou inverso aditivo) na soma, ou seja, existe $-x \in K$ tal que $x+(-x) = 0$;

e) O produto é associativo, ou seja, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

f) O produto é comutativo, ou seja $x \cdot y = y \cdot x$;

g) Existe um elemento neutro no produto, ou seja, existe $1 \in K$ tal que $x \cdot 1 = x$;

h) Existe um elemento inverso multiplicativo no produto, ou seja, existe $x^{-1} \in K \setminus \{0\}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$;

i) Vale a distributiva do produto em relação a adição, ou seja, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Dessa forma, o terno $(K, +, \cdot)$ é dito ser um Corpo.

Observação 2.1.1 *a) Tomando $K = \mathbb{R}$, $+$ como sendo a operação de soma usual de números reais e $\cdot$ como sendo o produto usual de números reais, temos que o terno $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo.*

b) A diferença $x - y$ é a soma de x com o oposto de y e, por isso, adição e subtração são a mesma operação, ou seja, são a soma.

c) Como a divisão $\dfrac{x}{y}$, com $y \neq 0$, é o produto de x com o inverso de y, segue que a multiplicação e a divisão também são a mesma operação, ou seja, são o produto.

Agora, vamos apresentar algumas propriedades de elementos reais que são demonstrada a partida da definição de corpo.

Teorema 2.1.1 *Para todos números reais x e y temos que:*

a) os elementos neutros da soma e do produto são únicos;

b) os elementos inversos da soma e do produto são únicos;

c) $0 + x = x$;

d) $-x + x = 0$;

e) $x \cdot 0 = 0$;

f) $1 \cdot x = x$;

g) $x^{-1} \cdot x = 1$.

Demonstração:

a) Suponha que 0 e $0'$ sejam os elementos neutros da soma de números reais. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x + (-x) = 0$ e $x + (-x) = 0'$. Daí,

$$0 = x + (-x) = 0'.$$

Logo, $0 = 0'$ e, portanto, o elemento neutro da soma de números reais é único.

Para o produto, suponha que 1 e $1'$ sejam os elementos neutros do produto de números reais. Assim, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos que $x \cdot x^{-1} = 1$ e $x \cdot x^{-1} = 1'$ e, por isso,

$$1 = x \cdot x^{-1} = 1'.$$

Daí, $1 = 1'$ e, portanto, o elemento neutro do produto de números reais é único.

b) Suponha que $-x$ e $-x'$ sejam elementos inversos aditivos de x na soma de números reais. Assim, $x + (-x) = 0$ e $x + (-x') = 0$. Daí, temos que:

$$-x = -x + 0 = -x + (x + (-x')) = (-x + x) + (-x') = 0 + (-x') = -x'.$$

Portanto, $-x = -x'$, ou seja, o elemento inverso aditivo da soma de números reais é único.

Por outro lado, suponha que x^{-1} e $\bar{x}^{-1}$ sejam elementos inversos multiplicativos de $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no produto de números reais. Assim, $x \cdot x^{-1} = 1$ e $x \cdot \bar{x}^{-1} = 1$. Logo, temos que:

$$x^{-1} = x^{-1} \cdot 1 = x^{-1} \cdot (x \cdot \bar{x}^{-1}) = (x^{-1} \cdot x) \cdot \bar{x}^{-1} = 1 \cdot \bar{x}^{-1} = \bar{x}^{-1}.$$

Portanto, $x^{-1} = -\bar{x}^{-1}$, ou seja, o elemento inverso multiplicativo do produto de números reais é único.

c) Da comutatividade na soma de números reais temos que

$$0 + x = x + 0 = x.$$

d) Da comutatividade na soma de números reais temos que

$$-x + x = x + (-x) = 0.$$

e) Observe que

$$x \cdot 0 + x = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 = x = 0 + x \Rightarrow x \cdot 0 = 0.$$

f) Da comutatividade do produto de números reais temos que

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

g) Da comutatividade do produto de números reais temos que

$$x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1.$$

■

Observação 2.1.2 *As regras de sinais do produto são obtidas através da distributiva da adição em relação a soma, como descrito a seguir:*

a) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

De fato: *Para* $x \cdot (-y)$*, temos que*

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot (-y) + x \cdot y - (x \cdot y) = 0 - (x \cdot y) \Rightarrow x \cdot (-y) = -(x \cdot y).$$

De modo análogo, para $(-x) \cdot y$ *temos que*

$$(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-x) \cdot y + x \cdot y - (x \cdot y) = 0 - (x \cdot y) \Rightarrow (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$
$$\therefore\ x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

□

b) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

De fato: *Temos que*

$$(-x) \cdot (-y) - x \cdot y = -x \cdot (-y + y) = -x \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-x) \cdot (-y) - x \cdot y + x \cdot y = 0 + x \cdot y \Rightarrow (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

$\square$

c) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$.

De fato: *Temos que*

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = y^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y) = 0 \ ou \ (x - y) = 0 \Rightarrow x = -y \ ou \ x = y.$$

$\square$

d) Em particular, temos as regras de sinais:

(1)	$\cdot$	(1)	$=$	1
(1)	$\cdot$	(-1)	$=$	-1
(-1)	$\cdot$	(1)	$=$	-1
(-1)	$\cdot$	(-1)	$=$	1

.

Dessa forma, acabamos de caracterizar o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com as operações de soma e produtos usuais, como sendo um corpo. Na próxima seção vamos apresentar outra propriedade presente nesse conjunto. Faça os exercícios dessa seção. Bons estudos.