Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Prova	2^a Avaliação de Álgebra Linear - 25/05/2023
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÂO** ser corrigida.
- Só serão corrigida 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção para não ser considerada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 10:00 as 11:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - 3y, 3x - 4y, -3x + 2y)$. Sabendo que B é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e C é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, obtenha $(T)_{B,C}$.

Solução: Como $B = \{e_1, e_2\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$, então, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Assim,

- $T(e_1) = T(1, 0) = (2.1 - 3.0, 3.1 - 4.0, -3.1 + 2.0) = (2, 3, -3)$;
- $T(e_2) = T(0, 1) = (2.0 - 3.1, 3.0 - 4.1, -3.0 + 2.1) = (-3, -4, 2)$.

Por outro lado, como $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, então, temos que $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Consequentemente,

- $T(e_1) = (2, 3, -3) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 3(0, 0, 1) = 2u_1 + 3u_2 - 3u_3$;
- $T(e_2) = (-3, -4, 2) = -3(1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1) = -3u_1 - 4u_2 + 2u_3$.

Portanto,

$$(T)_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Determine de forma explicita a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sabendo que $T(1, 0, 1) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, -1) = (-2, 1, -1)$ e $T(0, 1, 1) = (0, 2, 1)$.

Solução: Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, existem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, -1) + \gamma(0, 1, 1) \Rightarrow (\alpha, \beta + \gamma, \alpha - \beta + \gamma) = (x, y, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & x \\ \beta + \gamma & = & y \\ \alpha - \beta + \gamma & = & z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & x \\ \beta & = & \dfrac{x + y - z}{2} \\ \gamma & = & \dfrac{-x + y + z}{2} \end{array} \right. .$$

Portanto, $(x,y,z) = x(1,0,1) + \left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)(0,1,-1) + \left(\dfrac{-x+y+z}{2}\right)(0,1,1)$. Dessa forma, como T é uma transformação linear, temos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) = T\left(x(1,0,1) + \left(\frac{x+y-z}{2}\right)(0,1,-1) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)(0,1,1)\right) = \\ = xT(1,0,1) + \left(\frac{x+y-z}{2}\right)T(0,1,-1) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)T(0,1,1) = \\ = x(1,2,3) + \left(\frac{x+y-z}{2}\right)(-2,1,-1) + \left(\frac{-x+y+z}{2}\right)(0,2,1) = \\ = \left(-y+z, \frac{3x+3y+z}{2}, 2x+z\right). \end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear T é dada por:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & T(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(-2y+2z, 3x+3y+z, 4x+2z) \end{array}.$$

3ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Considere $V = \mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$. Considere as bases $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $C = \{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$ de V. Encontre as matrizes mudança de bases $[M]_C^B$ e $[M]_B^C$. Sabendo que $[v]_C = (6,3,9)$, encontre as coordenadas de v na base B.

Solução: Como C é uma base de V, podemos escrever cada vetor de B como sendo uma combinação linear dos elementos de C, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 &=& \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3 \\ e_2 &=& \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_3 \\ e_3 &=& \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2 + \gamma_3 u_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 &=& \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 \\ e_2 &=& \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 \\ e_3 &=& \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 \end{array}\right.$$

Dessa forma, temos que $[M]_C^B = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, escrevendo os vetores de C como uma combinação linear dos vetores de B, que é a base canônica, temos que $[M]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Logo, como $[v]_B = [M]_B^C \cdot [v]_C$, segue que

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Considere $V = P_2$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $B = \{1, x-1, x^2-2x+1\}$ uma base de V. Encontre as coordenadas de $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$ em relação a base B.

Solução: Para todo $p(x) = cx^2 + bx + a \in V$, existem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = \alpha(1) + \beta(x-1) + \gamma(x^2-2x+1) = (\alpha - \beta + \gamma)\cdot 1 + (\beta - 2\gamma)\cdot x + \gamma \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma &= a \\ \beta - 2\gamma &= b \\ \gamma &= c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= a+b-c \\ \beta &= b+2c \\ \gamma &= c \end{cases}.$$

Portanto,

$$[p(x)]_B = (a+b-c, b+2c, c).$$

Como em $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$ temos $a = 6$, $b = -5$ e $c = 2$, então,

$$[p(x)]_B = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot x + (2)\cdot x^2.$$

5ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Seja $(V, +, \cdot)$, com $V = \mathbb{K}^n$, um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Considere o subconjunto $W = \{(x_1, x_2, \cdot, x_n) \in V;\ x_1 = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de V.

Solução: Considere $\alpha = (0, x_2, \cdot, x_n)$ e $\beta = (0, y_2, \cdots, y_n)$. Então, temos que $k\alpha = (0, kx_2, \cdots, kx_n)$, para todo $k \in \mathbb{K}$. Como $x_i, y_i \in \mathbb{K}$ (para todo i), segue que $kx_i + y_i \in \mathbb{K}$ e, desta forma,

$$k\alpha + \beta = (0, kx_2 + y_2, \cdots, kx_n + y_n) \in W.$$

Portanto, W é um subespaço vetorial de V sobre o corpo K.

6ª **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):**

a) Mostre que $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ é uma base para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

b) Considere $V = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Escreva o vetor $\beta = (3,-2)$ como uma combinação linear dos vetores $\alpha_1 = (1,0)$ e $\alpha_2 = (-1,1)$.

c) A função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) = (x+y-z, y+3z, 2x+y-1)$ é um operador linear? Por que?

Solução:

a) Para que $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ seja uma base, precisamos mostrar que B é LI e que gera os elementos do $\mathbb{R}^3$. Para isso:

   - Temos que B é LI, visto que se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(1,1,1) + \beta(-1,1,0) + \gamma(1,0,-1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \text{ é LI.}$$

   Portanto, como a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3 e B é um conjunto LI com três vetores, temos que B é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

   Portanto, como B é LI e gera o $\mathbb{R}^e$, segue que B é uma base do $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

b) Temos que β é uma combinação linear dos vetores α_1 e α_2 se existirem escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2$. Desta forma, como $a\alpha_1 = a(1,0) = (a,0)$ e $b\alpha_2 = b(-1,1) = (-b,b)$, segue que $(3,-2) = (a,0) + (-b,b) = (a-b,b)$, ou seja,

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ \quad\ \ b = -2 \end{cases}.$$

   Da segunda linha temos que $b = -2$ e da primeira linha concluímos que $a = 3 + b = 1$. Portanto, $\beta = \alpha_1 - 2\alpha_2$.

c) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + y - z, y + 3z, 2x + y - 1)$ é um operador linear, então $T(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Contudo, $T(0, 0, 0) = (0, 0, -1) \neq (0, 0, 0)$. Portanto, T não é um operador linear.

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!!