2.3 Cálculo das Integrais Duplas

Para funções de uma variável, o *Teorema Fundamental do Cálculo* proporciona um método para calcular uma integral definida encontrando uma *Antiderivada* (ou *Integral Indefinida*) do integrando. Para integral dupla existe um método semelhante. O desenvolvimento detalhado desse método é dado num curso de Cálculo Avançado. A discussão aqui é intuitiva, usando interpretação geométrica da integral dupla como a medida de um volume. Para desenvolver o método considere primeiro um região retangular R^2.

Seja f uma função dada que é integrável numa região retangular, no plano XY, limitada pelas retas $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$ e $y = b_2$. Suponha que $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$. A Figura 2.3 mostra um esboço do gráfico da equação $z = f(x, y)$, quando (x, y) está em R.

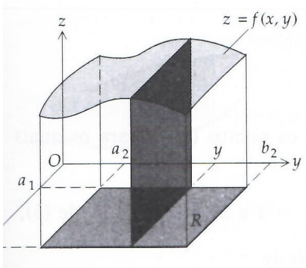

Figura 2.3: Figura usada na construção das ideias de cálculo da integral dupla.

O número que representa o valor da integral dupla

$$\int\int_R f(x, y)dA$$

é a medida do volume do sólido entre a superfície e a região R Seja y um número em $[a_2, b_2]$. Considere o plano paralelo ao plano XZ passando por $(0, y, 0)$. Seja $A(y)$ a área da região plana da intersecção desse plano com o sólido. A medida do volume do sólido é expressa por

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y)dy.$$

Como o volume do sólido também é obtido pela integral dupla, segue que:

$$\int\int_R f(x, y)dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y)dy \tag{2.3}$$

Assim, é possível encontrar o valor da integral dupla de uma função f em R, calculando o valor da integral simples de $A(y)$. Agora é preciso encontrar $A(y)$ quando y for dado. Como $A(y)$ é a medida de área de uma região plana, pode-se encontrar o valor de $A(y)$ por integração simples. A fronteira superior da região plana é o gráfico da equação $z = f(x, y)$, quando $x \in [a_1, b_1]$. Logo,

$$A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx.$$

Substituindo na Equação 2.3 obtemos

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\right]dy. \tag{2.4}$$

A integral a direita de 2.4 é chamada de integral iterada. Usualmente os colchetes são omitidos e escrevemos apenas

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dxdy. \tag{2.5}$$

Antes de se calcular a "integral iterada", lembremos que primeiro x deve ser considerado como sendo a variável de integração e que y deve ser considerada constante. Ao se considerar seções planas ao plano YZ, em vez de XZ, obtemos uma integral iterada com a ordem de integração trocada, isso é,

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dydx. \tag{2.6}$$

Uma condição suficiente para que 2.5 e 2.6 sejam iguais é que a função seja contínua na região retangular R. Vamos aos primeiros exemplos.

Exemplo 2.3.1 *Calcule a integral dupla* $\int\int_R (3y-2x^2)dA$*, onde* R *é a região que consiste de todos os pontos* (x,y) *para os quais* $-1 \leq x \leq 2$ *e* $1 \leq y \leq 3$.

Solução: Como $a_1=-1$, $b_1=2$, $a_2=1$ e $b_2=3$, da equação 2.5 temos que:

$$\int\int_R (3y-2x^2)dA = \int_1^3\int_{-1}^2 (3y-2x^2)dxdy.$$

Assim,

$$\int\int_R (3y-2x^2)dA = \int_1^3\left[3xy-\frac{2}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^2 dy =$$

$$\int_1^3 (9y-6)dy = \left[\frac{9}{2}y^2-6y\right]\Big|_1^3 = 24.$$

■

Exemplo 2.3.2 *Ache o volume do sólido limitado pela superfície* $f(x,y) = 4-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$*, pelos planos* $x=3$ *e* $y=2$ *e os planos coordenados.*

Solução: Se V unidades é o volume do sólido, então temos que:

$$V = \int\int_R f(x,y)dA = \int_0^3\int_0^2 (4-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16})dydx.$$

Assim,

$$V = \int_0^3\left[4y-\frac{yx^2}{9}-\frac{y^3}{48}\right]\Big|_0^2 dx = \int_0^3(\frac{47}{6}-\frac{2x^2}{9})dx = \left[\frac{47x}{6}-\frac{2x^3}{27}\right]\Big|_0^3 = \frac{43}{2}.$$

Portanto, o volume é $21,5$ unidades de área. ■

Agora, suponha que R seja uma região no plano XY, limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $a < b$, e pelas curvas $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$, onde $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e que, além disso, $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, para todo x tal que $a \leq x \leq b$. Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$, definida por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Considere a região R dividida em faixas verticais com $\Delta_i x$ unidades de largura. A intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e um plano $x = \xi_i$, onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ é uma curva. A medida da área dessa região é dada por:

$$\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)dy.$$

A medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela i-ésima faixa vertical é aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)dy\right] \Delta_i x.$$

Quando a norma de Δ tende a zero, se for tomado o limite da soma das medidas dos volumes para n faixas verticais de R, desde $x = a$ até a $x = b$, obtém-se a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pela região R no plano XY, e isto é o valor da integral dupla de f em R, ou seja,

$$\int\int_R f(x, y)dA = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y)dy\right] \Delta_i x = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dydx. \tag{2.7}$$

Condições suficientes para que a Equação 2.7 seja válida são que f seja contínua na região fechada R e que $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ sejam funções "suaves". Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.3.3 *Calcule o volume do sólido que está situado à cima do eixo XY, limitado pelo paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.*

Solução: A Figura 2.4 mostra o sólido. Para encontrar o volume da parte do sólido que está no primeiro octante a qual, com base nas propriedades de simetria, é um quarto do volume pedido. A região R no plano XY está limitada pelos eixos x e y e pela elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Se V unidades de volume é o volume do sólido dado, então,

$$V = \int\int_R (x^2 + 4y^2)dA.$$

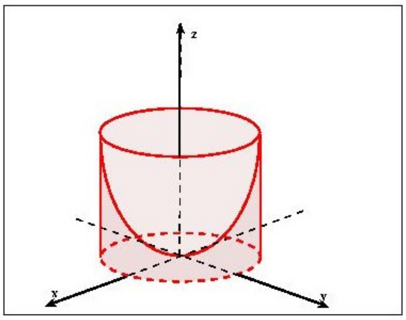

Figura 2.4: Sólido usado no Exemplo 2.3.3.

Para expressar V como uma integral iterada, divida a região R em n fatias verticais. A largura da faixa é $\Delta_i x$ e o comprimento é de $\frac{1}{2}\sqrt{4-\xi_i^2}$ unidades, onde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Assim,

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} f(x,y)dydx.$$

Então, $V = 4\int_0^2 \left[\frac{x^2\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{(\sqrt{4-x^2})^{3/2}}{6}\right]dx = \frac{4}{3}\int_0^2 (x^2+2)\sqrt{4-x^2}dx =$ $= -\frac{1}{3}x(4-x^2)^{3/2} + 2x\sqrt{4-x^2} + 8arcsin(\frac{x}{2})\Big|_0^2 = 4\pi$. Logo, o volume V é de 4π unidades de volume. ■

Suponha que a região R seja limitada pelas curvas $x = \lambda_1(y)$ e $x = \lambda_2(y)$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$, com $c < d$ e que $\lambda_1(y)$ e $\lambda_2(y)$ sejam duas funções contínuas no intervalo fechado $[c,d]$, onde $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$, sempre que $c \leq y \leq d$. Usando a mesma ideia apresentada anteriormente, pode-se concluir que o volume do sólido é dado por

$$\left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x,\gamma_i)dx\right]\Delta_i y.$$

E tomando a norma de Δ tendendo a zero e tomando o limite da soma dos volumes para n faixas horizontais de R, de $y = c$ até $y = d$, obtém-se a medida do volume do sólido limitado acima pela superfície $z = f(x,y)$ e abaixo pela região R no plano XY. Essa medida de volume é igual a integral dupla de f em R. Logo,

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x,\gamma_i)\right]\Delta_i y = \int_a^b \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} dxdy. \quad (2.8)$$

Condições suficientes para que a Equação 2.8 seja válida são que λ_1 e λ_2 sejam funções suaves e f seja contínua em R. Na aplicação das Equações 2.7 e 2.8, em algumas vezes, pode ser necessário subdividir uma região R em sub-regiões nas quais são verificadas essas condições suficientes.

Exemplo 2.3.4 *Calcule o valor da integral apresentada no Exemplo 2.3.3 usando a ordem de integração inversa da usada naquele exemplo.*

Solução: Novamente, devemos calcular o volume do sólido no primeiro octante e multiplicar o resultado por 4. Para este caso, cada faixa horizontal de largura $\Delta_i y$ tem comprimento $2\sqrt{1-y^2}$. Então, usando a Equação 2.8, temos que

$$V = 4\int_0^1 \int_0^{(2\sqrt{1-y^2})} dxdy = 4\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + 4y^2x\right]\Bigg|_0^{2\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^1 (2y^2+1)\sqrt{1-y^2}dy = -\frac{16}{3}y(1-y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1-y^2} + 8arcsin(y)\Bigg|_0^1 = 4\pi.$$

Logo, o volume V é de 4π unidades de volume. ■

Exemplo 2.3.5 *Ache, por integração dupla a área da região no plano XY, limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.*

Solução: A Região R é dada pela Figura 2.5.

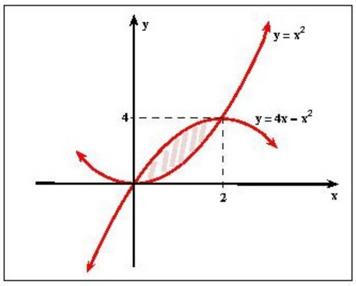

Figura 2.5: Figura do Exemplo **??**.

Assim,

$$A = \int\int_R dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dydx = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Logo, a área da Região R é $\frac{8}{3}$. ■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.

2.4 Exercícios

Exercício 2.4.1 *Calcule o valor de cada uma das integrais abaixo:*

a) $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx;$

b) $\int_0^4 \int_0^y dxdy;$

c) $\int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2}dxdy;$

d) $\int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \frac{x}{y}dydx;$

e) $\int_1^4 \int_{y^2}^{y} \sqrt{\frac{x}{y}}dxdy$;

f) $\int_0^x \int_{\frac{\pi}{2}}^{2} sen(4x-y)dydx$

Exercício 2.4.2 *Ache o volume do sólido sob o plano* $z = 4x$ *e acima da circunferência* $x^2 + y^2 = 16$ *no plano* XY. *Faça um esboço do sólido.*

Exercício 2.4.3 *Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros* $x^2 + y^2 = 4$ *e* $x^2 + z^2 = 4$. *Faça um esboço do sólido.*

Exercício 2.4.4 *Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelas superfícies* $x + z^2 = 1$, $x = y$ *e* $x = y^2$. *Faça um esboço do sólido.*

Exercício 2.4.5 *Calcule o valor de cada item abaixo:*

a) $\int\int_R sen(x)dA$, *onde* R *é a região limitada pelas retas* $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ *e* $x = \pi$.

b) $\int\int_R cos(x+y)dA$, *onde* R *é a região limitada pelas retas* $y = x$, $y = 2$, $x = \pi$ *e o eixo* x.

c) $\int\int_R x^2\sqrt{9-y^2}dA$, *onde* R *é a região limitada pela circunferência* $x^2 + y^2 = 9$.