7.3 Funções Contínuas em Conjuntos Compactos

Muitas vezes desejamos encontrar o valor mínimo e o valor máximo de uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Em matemática, primeiro buscamos garantir a existência de um extremo, visto que $f(x)$ pode ser ilimitado superiormente, sendo essa a razão de não existir máximo, ou ilimitado inferiormente, não existindo mínimo, mesmo tendo X como sendo um conjunto limitado.

Exemplo 7.3.1 *1. Seja $X = (0, 1)$ e $f : X \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x$. Então, $f(X) = (0, 1)$ e, por isso, $f(X)$ não possui extremos, como visto na Figura 7.1.*

2. Seja $X = \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Então, $g(X) = (0, 1]$ e, por isso, $g(X)$ não possui valor mínimo, mas g possui valor máximo, como visto na Figura 7.1.

3. Seja $X = \mathbb{R}$ e $h : X \to \mathbb{R}$ a função dada por $h(x) = sen(x)$. Então, $h(X) = [-1, 1]$ e, por isso, $f(X)$ possui mínimo e máximo, como visto na Figura 7.1.

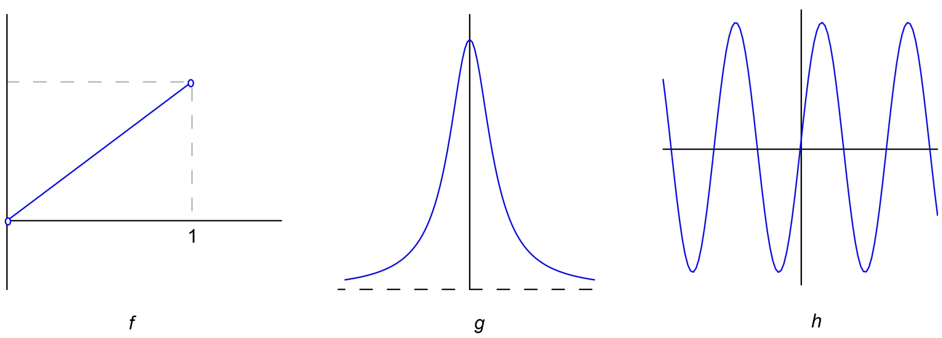

Figura 7.1: Esboço dos gráficos das funções $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e $h(x) = sen(x)$, no domínimo proposto no Exemplo 7.3.1.

Como garantir a existência dos extremos de uma função? Pois bem, sob uma certa circunstância, o Teorema de Weierstrass responder essa pergunta. Antes, vamos verificar o que ocorre com a imagem de uma função contínua sobre um conjunto compacto.

Teorema 7.3.1 *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração: Do Teorema 5.4.1, temos que $f(X)$ é compacto se toda sequência $(y_n) \subset f(X)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto de $f(X)$.
Seja $(y_n) \subset f(X)$ uma sequência. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como X é compacto, a sequência $(x_n) \subset X$ possui uma subsequência convergente, digamos $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, com $x_{n_k} \to a \in X$. Como f é

contínua, segue que f é contínua em a e, por isso, existe $b \in f(X)$ tal que $b = f(a)$. Além disso,

$$\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(a) = b$$

e, por isso, $f(X)$ é compacto. $\blacksquare$

Teorema 7.3.2 ***(Teorema de Weierstrass:)*** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Como $f(X)$ é compacto, da Observação 5.4.1, temos que existe $f(x_0), f(x_1) \in f(X)$ tal que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $f(x) \in f(X)$. Ou seja, existe $x_0, x_1 \in X$, tal que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in X$, terminando a prova do teorema. $\blacksquare$

Corolário 7.3.1 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, então, toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada, ou seja, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| < c$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Como X é compacto e f é contínua, do Teorema de Weiestrass seque que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in X$. Assim, tomando $c = \max\{|x_0|, |x_1|\}$, segue que $-c \leq f(x) \leq c$, para todo $x \in X$. $\blacksquare$

Exemplo 7.3.2

1. *A função $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua, mas $f(X)$ não possui o extremo superior, visto que D_f não é compacto.*

2. *A função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ é contínua. Então, como g está definida num compacto, segue do Teorema de Weiesrtrass que $g([a, b])$ possui mínimo e máximo. Na verdade, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, para todo $x \in [a, b]$.*

Teorema 7.3.3 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, então, toda bijeção contínua $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \to X$.*

Demonstração: Seja $b = f(a) \in \mathbb{Y}$. Precisamos mostrar que g é contínua em b. Suponha que g não seja contínua em b, então, existe um $\epsilon > 0$ tal que $(y_n) \subset Y$, $y_n \to b$ mas $|g(y_n) - g(b)| \geq \epsilon$, isto é, $|x_n - a| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Como X é compacto, temos que existe $a' \in X$ tal que $x_{n_k} \to a'$, onde $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ e, por isso, $|a' - a| \geq \epsilon$. Dessa forma, temos que $a' \neq a$ mas, pela continuidade de f, temos que $\lim y_n = \lim f(x_{n_k}) = f(a')$. Como $\lim y_n = b = f(a)$, segue que $f(a') = f(a)$, o que é um absurdo, visto que f é uma bijeção. Portanto, g é contínua. $\blacksquare$

Em outras palavras, o Teorema 7.3.3 nos diz que se X é compacto, então, toda bijeção contínua $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. Além disso, é importante observar que o teorema é estabelecido a partir da compacidade de X e não do conjunto Y, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 7.3.3 *Seja* $Y = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$*. Então, temos que* Y *é compacto (*Y *é limitado e fechado). Tome a bijeção* $f : \mathbb{N} \to Y$ *dada por* $f(1) = 0$ *e* $f(n) = \frac{1}{n-1}$*, se* $n > 1$*. Temos que* f *é contínua, mas a sua inversa não é contínua em zero.*

De fato: Seja $g : Y \to \mathbb{N}$ a inversa da função f. Então, como

$$y = \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow yn - y = 1 \Leftrightarrow yn = 1 + y \Leftrightarrow n = \frac{1+y}{y},$$

segue que g é dada por $g(0) = 1$ e $g(y) = \frac{1+y}{y}$. Como $\lim_{y \to 0} g(y) = +\infty$, segue que a função g é descontínua em 0. $\square$