Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Prova	2^a Avaliação de Cálculo Diferencial e Integral 1 - 22/05/2023
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÃO** ser corrigida.
- Só serão corrigida 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção a ser desconsiderada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 21:00 as 22:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a sua prova será anulada.

1ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = t^3 + 3t^2 + 2t - 1$, com $t \geq 0$. Ache os valores de t de forma que a medida da aceleração instantânea seja igual a 0. Além disso, indique quando o objeto muda de direção.

Solução: Temos que $a(t) = v'(t)$ e que $v(t) = s'(t)$. Assim, como

$$v(t) = (s(t))' \Rightarrow v(t) = (t^3 + 3t^2 + 2t - 1)' = 3t^2 + 6t + 2.$$

Consequentemente,

$$a(t) = (v(t))' \Rightarrow v(t) = (3t^2 + 6t + 2)' = 6t + 6,$$

que é maior do que zero para todo $t \geq 0$. Portanto, não existe ponto onde a aceleração vale zero para essa equação.

2ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Ache uma equação da reta tangente e da reta normal à curva $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$, no ponto $x = 2$.

Solução: A inclinação da reta tangente é dada por $m_T = y'$. Assim,

$$m_T(2) = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)'\Bigg|_{x=2} = (x^3 - x)|_{x=2} \Rightarrow m_T = 6.$$

Sendo $x = 2$, segue que $y = \dfrac{2^4}{4} - \dfrac{2^2}{2} = 4 - 2 = 2$ e, por isso, uma equação da reta tangente fica dada por

$$r_t : 6 = \frac{y-2}{x-2}.$$

Como a inclinação da reta normal é igual a $m_N = -\dfrac{1}{m_T}$, segue que uma equação da reta normal fica dada por

$$r_n : -\frac{1}{6} = \frac{y-2}{x-2}.$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funções de t. Sabendo que $\dfrac{2x+3y}{y-x} = 10$ e que $\dfrac{dx}{dt} = 2$, encontre $\dfrac{dy}{dt}$.

Solução: Como $\dfrac{2x+3y}{y-x} = 10$, então,

$$2x + 3y = 10(y - x) \Rightarrow 2x + 3y = 10y - 10x \Rightarrow 7y = 12x \Rightarrow y = \frac{12}{7}x.$$

Assim, derivando em relação a t dos dois lados temos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{12}{7}.\frac{dx}{dt} = \frac{12}{7}.2 = \frac{24}{7}.$$

$4^{\underline{a}}$ **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre as derivadas de $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ ordem da função $f(x) = 2x^6 - 2x^5 + \dfrac{x^4}{4} + 2x^3 - \dfrac{x^2}{6} + 2x + 1$.

Solução: Temos que

- $f'(x) = \left(2x^6 - 2x^5 + \dfrac{x^4}{4} + 2x^3 - \dfrac{x^2}{6} + 2x + 1\right)' = 12x^5 - 10x^4 + x^3 + 6x^2 - \dfrac{x}{3} + 2.$
- $f''(x) = (f'(x))' = \left(12x^5 - 10x^4 + x^3 + 6x^2 - \dfrac{x}{3} + 2\right)' = 60x^4 - 40x^3 + 3x^2 + 12x - \dfrac{1}{3}.$
- $f'''(x) = (f''(x))' = \left(60x^4 - 40x^3 + 3x^2 + 12x - \dfrac{1}{3}\right)' = 240x^3 - 120x^2 + 6x + 12.$

$5^{\underline{a}}$ **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre as dimensões do maior campo retangular que pode ser fechado com $360m$ de cerca.

Solução: Seja A a área do campo retangular de lados medindo x e y. Assim, temos que $2x+2y = 360$, ou seja, $y = 180 - 360$. Assim, Como $A = xy$, temos que

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}[x(180 - x)] = \frac{d}{dx}[180x - x^2] = 180 - 2x.$$

Assim, o único ponto crítico da função é dado quando $180 - 2x = 0$, ou seja, quando $x = 90$. Como

- $x = 0 \Rightarrow y = 180$, então, $A = 0u.a.$;
- $x = 90 \Rightarrow y = 90$, então, $A = 1800u.a.$;
- $x = 180 \Rightarrow y = 0$, então, $A = 0u.a.$;

segue que as dimensões do campo são $x = y = 90$ para a área ser máxima.

$6^{\underline{a}}$ **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):** Calcule a derivada de cada função a seguir.

a) $f(x) = 2x\cos(x)$.

b) $f(x) = \left(\dfrac{x-7}{x+2}\right)^2$.

Solução:

a) $f'(x) = (2x\cos(x))' = (2x)'\cos(x) + 2x(\cos(x))' = 2\cos(x) - 2x\text{sen}(x)$.

b) $'f(x) = \left(\left(\dfrac{x-7}{x+2}\right)^2\right)' = 2\left(\dfrac{x-7}{x+2}\right).\left(\dfrac{x-7}{x+2}\right)' = 2\left(\dfrac{x-7}{x+2}\right).\left(\dfrac{1(x+2) - 1(x-7)}{(x+2)^2}\right) = \left(\dfrac{18(x-7)}{(x+2)^3}\right).$

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!